KETAKTERHINGGAAN & KEMAMPUAN BERPIKIR MANUSIA
Hendra Gunawan
TEDx Bandung, 8 Mei 2016

1. Saya akan bercerita tentang betapa luar biasanya **manusia**, dengan **kemampuan berpikir** yang dimilikinya, bisa memahami sesuatu yang abstrak, tidak dapat dilihat, didengar, diendus, dicicipi ataupun diraba -- singkatnya, di luar jangkauan panca indera.

Mirip, tetapi tidak sama, dengan kemampuan melihat dan berkomunikasi dengan makhluk gaib.

Sesuatu yang abstrak tadi adalah matematika, dan yang akan saya ceritakan adalah konsep **ketakterhinggaan**, suatu konsep matematika yang tidak mudah dan masih menjadi perdebatan hingga hari ini.

2. Sejak 2500 tahun yl, para filsuf Yunani Kuno telah bergulat dengan ketakterhinggaan, beberapa di antaranya memilih untuk menolaknya. **Zeno**, misalnya, mengungkapkan penolakannya terhadap ketakterhinggaan melalui sebuah paradoks: balapan lari antara **Achilles** dan **kura-kura**.

Sang kura-kura memulai balapan 1 km di depan Achilles, dan berlari dengan kecepatan 1 km/jam (memakai papan luncur), sementara Achilles berlari santai dengan kecepatan 2 km/jam (karena ia yakin akan menang).

Tetapi, kata Zeno, Achilles tidak akan menang: pada saat ia sampai di posisi 1 km, kura-kura telah berada di posisi 1½ km, dan pada saat Achilles sampai di posisi 1½ km, kura-kura telah berada di posisi 1¾ km, dan seterusnya Achilles akan selalu berada di belakang kura-kura.

Pada saat itu, konsep deret tak terhingga belum dikenal, sehingga muncullah paradoks ini --- **paradoks Zeno**.

3. Selain Zeno, **Aristoteles** juga tidak menerima ketakterhinggaan. Menurut Aristoteles, kita dapat melukis garis sepanjang-panjangnya, tetapi selalu terhingga.

Bila ada garis yang tak terhingga panjangnya, Aristoteles “menemukan” adanya kejanggalan: bagaimana mungkin jarak tak terhingga dapat ditempuh dalam waktu terhingga. “Itu mustahil,” katanya; “karena itu ketakterhinggaan tidak boleh ada.”

4. Bila kita berbicara tentang **alam fisis**, segala sesuatu memang terhingga. **Kecepatan cahaya** di ruang hampa ‘hanya’ 300.000 km per detik.

Banyak **sel** dalam tubuh manusia ‘hanya’ 100 trilyun.

Diameter alam semesta yang dapat dilihat (*observable universe*) ‘hanya’ $9{,}2 \times 10^{26}$ meter.

Bilangan terbesar di alam fisis adalah **densitas alam semesta**, yaitu $5{,}1 \times 10^{96}$ kilogram per meter kubik.

5. Dalam matematika, bilangan besar yang diberi nama adalah 1 **googol** = 10^{100}, dan 1 **googolplex** = 10^{googol}. (Bila seorang siswa dihukum oleh gurunya untuk menulis bilangan 10000....00000 sepanjang-panjangnya di papan tulis, siswa tsb mungkin menulis bilangan yang lebih besar dari 1 googol - yang melampaui densitas alam semesta.)

6. Selain itu, di alam fisis, ada pula bilangan-bilangan yang sangat kecil, misalnya: massa sebuah **elektron** yang diam atau stasioner $9{,}11 \times 10^{-31}$ kilogram.

Tetapi, dalam matematika, kita dapat berbicara tentang bilangan 10^{-100} atau yang lebih kecil lagi, tetapi masih positif.

7. Aristoteles benar tentang alam fisis, tetapi, seperti kata **Plato**, matematika adalah **dunia gagasan**. (Dalam dunia gagasan, ruang tak terbatas. Kita dapat berbicara tentang garis yang tak terhingga panjangnya, walau kita tidak dapat melukiskannya.)

8. **John Wallis** (1616-1703), matematikawan Inggris, adalah orang yang pertama kali menggunakan lambang ∞ untuk menyatakan ketakterhinggaan dan 1/∞ untuk '**infinitesimal**', bilangan yang tak terhingga kecilnya, sebelum Newton mengembangkan Kalkulus. Konsep infinitesimal merupakan cikal bakal revolusi industri, tapi saya tidak akan bercerita ttg hal tsb.

Oh ya, Wallis menemukan rumus untuk **bilangan pi**, yang baru-baru ini ditemukan aplikasinya dalam **fisika kuantum**:

9. Ketakterhinggaan merupakan *test case* bagi manusia (khususnya matematikawan), seberapa jauh manusia dapat memahaminya, tanpa terganggu oleh intuisinya.

Sebagai ilustrasi, marilah kita tengok **bilangan asli**: 1, 2, 3, 4, 5, dan seterusnya. Ada berapa banyak bilangan asli ini?

10. Untuk itu, ada kisah matematis tentang sebuah hotel bernama **Hotel Hilbert**. Hotel ini memiliki kamar sebanyak bilangan asli, kamar no. 1, 2, 3, dan seterusnya. Suatu ketika, kamar telah terisi penuh. Lalu ada seorang tamu datang dan ingin menginap di Hotel Hilbert.

Sang resepsionis binggung, bertanya kepada Manajer Hotel. Kata Manajer Hotel, mudah saja.. tamu di kamar no. 1 tinggal dipindahkan ke kamar no. 2, tamu di kamar no. 2 ke kamar no. 3, tamu di kamar no. 3 ke kamar no. 4, dan seterusnya. Nah, kamar no. 1 yang sekarang telah kosong bisa diberikan kepada tamu baru.

11. Bila anda merasa telah mengetahui banyaknya bilangan asli, bagaimana dengan **bilangan bulat** (yang tdd bilangan bulat positif, 0, dan bilangan bulat negatif)? Apakah bilangan bulat lebih banyak daripada bilangan asli?

Ternyata kita dapat **memadankan** setiap bilangan bulat satu-per-satu dengan bilangan asli, dengan urutan 0, 1, -1, 2, -2, ...

Dalam Teori Himpunan, ini berarti bahwa himpunan bilangan bulat mempunyai **kardinalitas** yang sama dengan himpunan bilangan asli.

12. Serupa dengan himpunan bilangan bulat, himpunan **bilangan rasional** juga mempunyai kardinalitas yang sama dengan himpunan bilangan asli, karena, meminjam istilah anak saya, kita dapat "mengabsennya" satu per satu.

Sekali lagi saya harus memperingatkan anda: jangan terkecoh oleh **intuisi** anda. Intuisi penting, tetapi matematikawan mengandalkan kemampuan berpikir yang dipandu oleh logika yang ketat.

13. Apakah semua bilangan dapat dipadankan dengan bilangan asli? Pada akhir abad ke-19, **Georg Cantor** -- matematikawan Jerman, penggagas teori himpunan -- membuktikan bahwa **bilangan real** ternyata 'jauh lebih banyak' daripada bilangan asli.

Bila kita mencoba 'mendaftarkan' atau 'mengabsen'-nya, kita akan gagal: selalu ada bilangan yang terlewat. Hal ini dibuktikan oleh Cantor dengan suatu metode, yang kemudian dikenal sebagai **Metode Diagonalisasi Cantor**.

14. Sebagai konsekuensi dari temuan Cantor, matematikawan menyadari bahwa ketakterhinggaan itu bertingkat.

Ketakterhinggaan himpunan bilangan asli merupakan ketakterhinggan tingkat pertama (disebut **alef-nol**). Lalu ada ketakterhinggaan tingkat berikutnya (disebut **kontinum**), yang menyatakan kardinalitas himpunan bilangan real.

15. Belakangan, matematikawan juga bisa 'melihat' (dengan kemampuan berpikirnya) bahwa kardinalitas himpunan bilangan real sama dengan kardinalitas **himpunan dari semua himpunan bagian** dari **N**, yang dilambangkan dengan $2^{\mathbf{N}}$.

16. Nah, Georg Cantor melangkah lebih jauh, bila dari N ia peroleh 2^N yang kardinalitasnya lebih besar daripada N, maka dari 2^N ia bisa memperoleh 2^(2^N) yang kardinalitasnya lebih besar daripada 2^N, dan seterusnya --- *ad infinitum*. Anda mungkin perlu menghela nafas. "*Welcome to Cantor's Heaven*!".

17. Hingga hari ini, temuan Cantor menyisakan satu pertanyaan: apakah memang tidak ada himpunan di antara **N** dan **R** yang memiliki kardinalitas lebih besar daripada alef-nol, tetapi lebih kecil daripada kontinum?

Menurut Cantor, tidak ada. Klaim ini dikenal sebagai **Hipotesis Kontinum**.

Cantor sendiri tidak dapat membuktikannya, dan hingga saat ini belum ada matematikawan yang dapat membuktikannya. Mungkin salah seorang di antara anda?

18. Ketakterhinggaan hanya merupakan salah satu gagasan matematika; banyak gagasan lainnya yang tak kalah menariknya. Banyak pula pertanyaan yang belum terjawab.

Entah sejauh mana para matematikawan dapat menaklukkan alam matematika, dengan kemampuan berpikir yang dimilikinya.

Nah, teman2, melalui matematika, **manusia** diuji **kemampuan berpikir** yang dimilikinya, seberapa jauh manusia dapat memahami sesuatu yang abstrak, yang tidak dapat dilihat, diraba, diendus, didengar, ataupun dicicipi.

Sesungguhnya, di dunia ini, termasuk di Indonesia, tak sedikit manusia yang memiliki kemampuan itu, sayang bila tidak dirawat dan digunakan.***