Vektor dan Operasinya

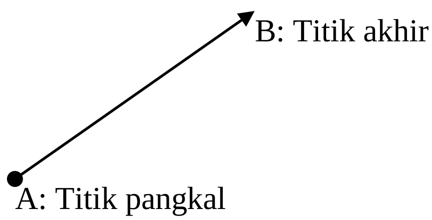
Tujuan:

1. **Mengingat kembali definisi vektor secara geometri dan aljabar.**
2. **Mahir menghitung perkalian titik, panjang vektor, sudut antara dua vektor, vektor proyeksi.**

Skalar: besaran saja
Vektor: besaran dan arah

Vektor secara geometri

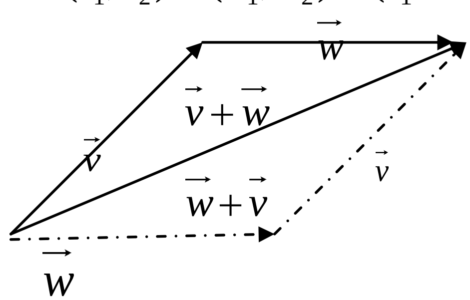
$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

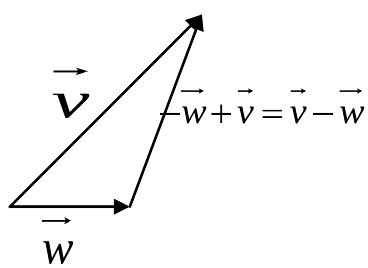


Vektor pada sistem koordinat (aljabar)

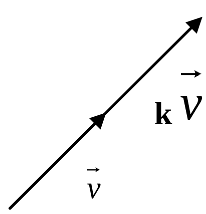
$\vec{v} = (v_1, v_2)$ **(di ruang dimensi dua),**

$\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$





k $\vec{v} = (kv_1, kv_2)$ **, k skalar**

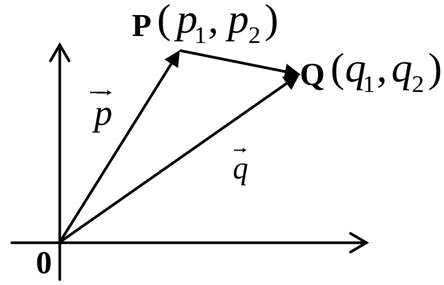


panjang vektor $\vec{v}$ **:** $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Vektor Posisi (pada koordinat Cartesius):

$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$,

$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$



$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ **(di ruang dimensi tiga)**

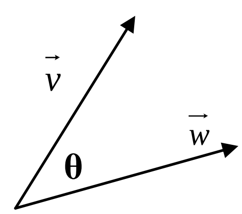
Contoh: gambarkan vektor-vektor berikut:

$\vec{p} = (2,-3)$, $\vec{q} = (1,4)$, $\vec{r} = (-3,-1)$, $\vec{p} + \vec{r}$, $\vec{q} - \vec{r}$

Perkalian Titik

$\vec{v}$ dan $\vec{w}$ vektor, θ adalah sudut antara $\vec{v}$ dan $\vec{w}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{cases} |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta, \text{ jika } \vec{v} \neq 0, \vec{w} \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , \text{ jika } \vec{v} = 0, \vec{w} = 0 \end{cases}$$



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

Vektor ortogonal: vektor-vektor yang tegak lurus, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

Sifat operasi perkalian titik

Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ adalah vektor (dimensi 2 atau 3), k adalah skalar

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

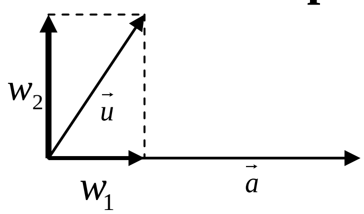
3. $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

4. $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ **jika** $\vec{v} \neq 0$**, dan** $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ **jika** $\vec{v} = 0$

Proyeksi ortogonal $\vec{u}$

Harus ada referensi suatu vektor lain, misal $\vec{a}$**.**

Mengurai u menjadi 2 bagian: sejajar dengan suatu vektor $\vec{a}$ **dan tegak lurus terhadap vektor** $\vec{a}$**.**



Vektor $\vec{u}$ **adalah jumlah dari** w_1 **dan** w_2**, dimana** w_1 **sejajar dengan** $\vec{a}$ **dan** w_2 **tegaklurus terhadap** $\vec{a}$**.**

Kita tulis:

$w_1 = \mathrm{p}_a \vec{u}$ **: proyeksi ortogonal** $\vec{u}$ **pada** $\vec{a}$**, atau komponen vektor** $\vec{u}$ **sepanjang** $\vec{a}$**.**

$w_2 = \vec{u} - \mathrm{p}_a \vec{u}$ **: komponen vektor** $\vec{u}$ **tegaklurus terhadap** $\vec{a}$**.**

Teorema:

Jika $\vec{u}$ **dan** $\vec{a}$ **adalah vektor-vektor dimensi 2 atau 3, dan** $\vec{u} \neq \vec{a}$**, maka**

$$\mathrm{p}_a \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}}{\left|\vec{\boldsymbol{a}}\right|^2} \vec{\boldsymbol{a}}$$

Dengan demikian:

$$\vec{u} - \mathrm{p}_a \vec{u} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}}{\left|\vec{\boldsymbol{a}}\right|^2} \vec{\boldsymbol{a}}$$

Dan $|p_a \vec{u}| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2} \vec{\boldsymbol{a}} \right| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2} \right| |\vec{\boldsymbol{a}}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|^2} |\vec{a}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = |\vec{u}| \; |\cos\theta|$

Dimana $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{|\vec{u}||\vec{a}|}$ **,** θ **sudut antara** $\vec{u}$ **dan** $\vec{a}$

Contoh: Tentukan proyeksi ortogonal $\vec{u} = (2,-3)$ **terhadap** $\vec{a} = (2,1)$.

Vektor dan Operasinya

Tujuan:

1. **Mahir menghitung perkalian silang dan memahami arti geometris serta penggunaannya.**
2. **Mahir menghitung perkalian tripel skalar dan memahami arti geometris serta penggunaannya.**

Perkalian silang

Misal $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$**, perkalian silang antara** $\vec{a}$ **dan** $\vec{b}$ **adalah vektor** $\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b}$ **sebagai berikut:**

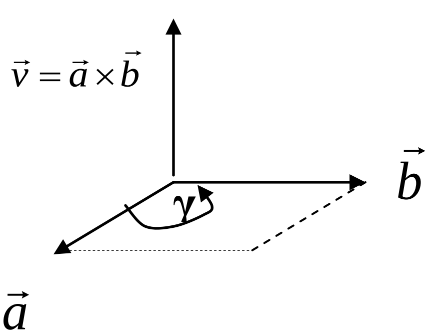
1. Jika salah satu atau keduanya merupakan vektor nol maka $\vec{v}=0$

2. Jika $\vec{a}$ **dan** $\vec{b}$ **sejajar dengan arah yang sama atau berlawanan maka** $\vec{v}=0$**.**

3. Jika γ adalah sudut antara a dan b maka $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ **dimana**

$$v_1=a_2b_3-a_3b_2,\quad v_2=a_3b_1-a_1b_3,\quad v_3=a_1b_2-a_2b_1$$

dan |v| = $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\gamma$**.**



Arti geometris $\vec{v}$ **dan** $|\vec{v}|$**:**

$\vec{v}$ **adalah vektor tegak lurus thd** $\vec{a}$ **dan** $\vec{b}$

$|\vec{v}|$ **: luas jajaran genjang**

Apakah $\vec{a}\times\vec{b}\overset{?}{=}\vec{b}\times\vec{a}$ **???**

Perkalian silang vektor basis standard: *i*=(1,0,0),*j*=(0,1,0),*k*=(0,0,1)

i x i, j x j, k x k

i x j, j x k, k x i

j x i, k x j, i x j

Cara menghitung:

Ingat penulisan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$**, perkalian silang secara simbolik sama dengan mencari determinan orde 3.**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

Sifat umum perkalian silang

Perkalian tripel skalar

Diketahui tiga vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$**,** $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ **dan** $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$**, perkalian tripel skalar, ditulis** $(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c})$**, adalah**

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ **dimana** $\vec{v} = (\vec{b}\times\vec{c})$

Cara menghitung: $(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}) =$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\beta$$

Arti geometris: $\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|$

$\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|$ **: volume dari parallepipedum dibentuk oleh vektor** $\vec{a}$ **,** $\vec{b}$ **dan** $\vec{c}$ **.**

Sifat perkalian tripel scalar:

$$(k\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}) = k(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c})$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Untuk contoh penggunaannya, lihat buku Kreizig.