Ruang Vektor

Tujuan:

1. **Mengingat kembali persamaan garis dan bidang di ruang.**
2. **Memahami aksioma ruang vektor, kombinasi linier dan ruang bagian.**
3. **Mengingat kembali pengertian bebas dan bergantung linier, basis dan dimensi.**

Arti geometris dari determinan

Jika A matriks 2x2, |det(A)| = area dari jajaran genjang dibentuk oleh 2 vektor.
Jika A matriks 3x3, |det(A)| = volume dari parallepipedum dibentuk oleh 3 vektor.

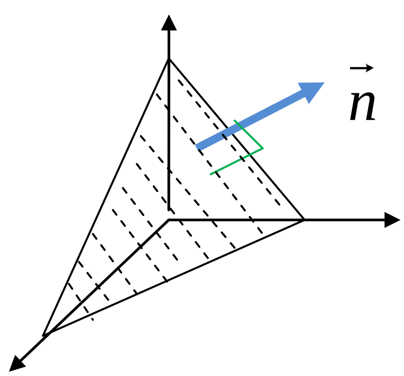
Persamaan garis dan bidang di ruang

Garis di ruang dimensi 2: persamaannya adalah

$$y - a = m\,(x - b)$$

(jadi diperlukan kemiringan m dan titik yang dilalui (a,b))

Bidang di ruang dimensi 3:
Diperlukan inklinasi (kemiringan) dan titik yang dilalui.
Untuk menyatakan inklinasi adalah satu vektor yang tegak lurus terhadap bidang.



Misal suatu bidang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan mempunyai vektor normal $\vec{n}$ =(a b c). Misal P(x,y,z) suatu titik berada pada bidang.

1. **Persamaan bidangnya adalah**

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

2. **atau bentuk normal persamaan bidang:**

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

3. **atau bentuk vektor persamaan bidang:**

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

di mana $\vec{r_0} = \overrightarrow{OP_0}, \vec{r} = \overrightarrow{OP}$

4. **atau bentuk parameter persamaan garis di bidang:**

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

di mana titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dilalui bidang dan vektor $\vec{v} = (a, b, c)$ paralel dengan bidang.

Contoh:
Cari persamaan bidang yang melalui titik (3,-2,1) dan tegak lurus terhadap vector $\vec{n}$ =(1 2 2). Gambar pada koordinat Cartesius.

Bila diketahui SPL berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

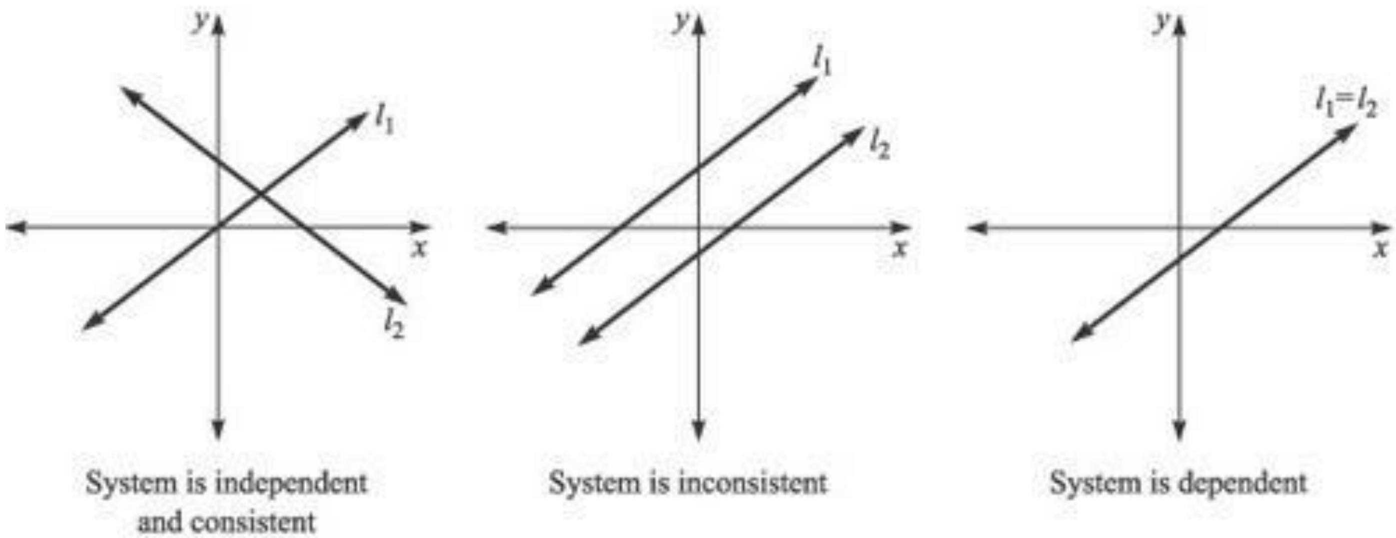
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Apa arti geometrisnya?

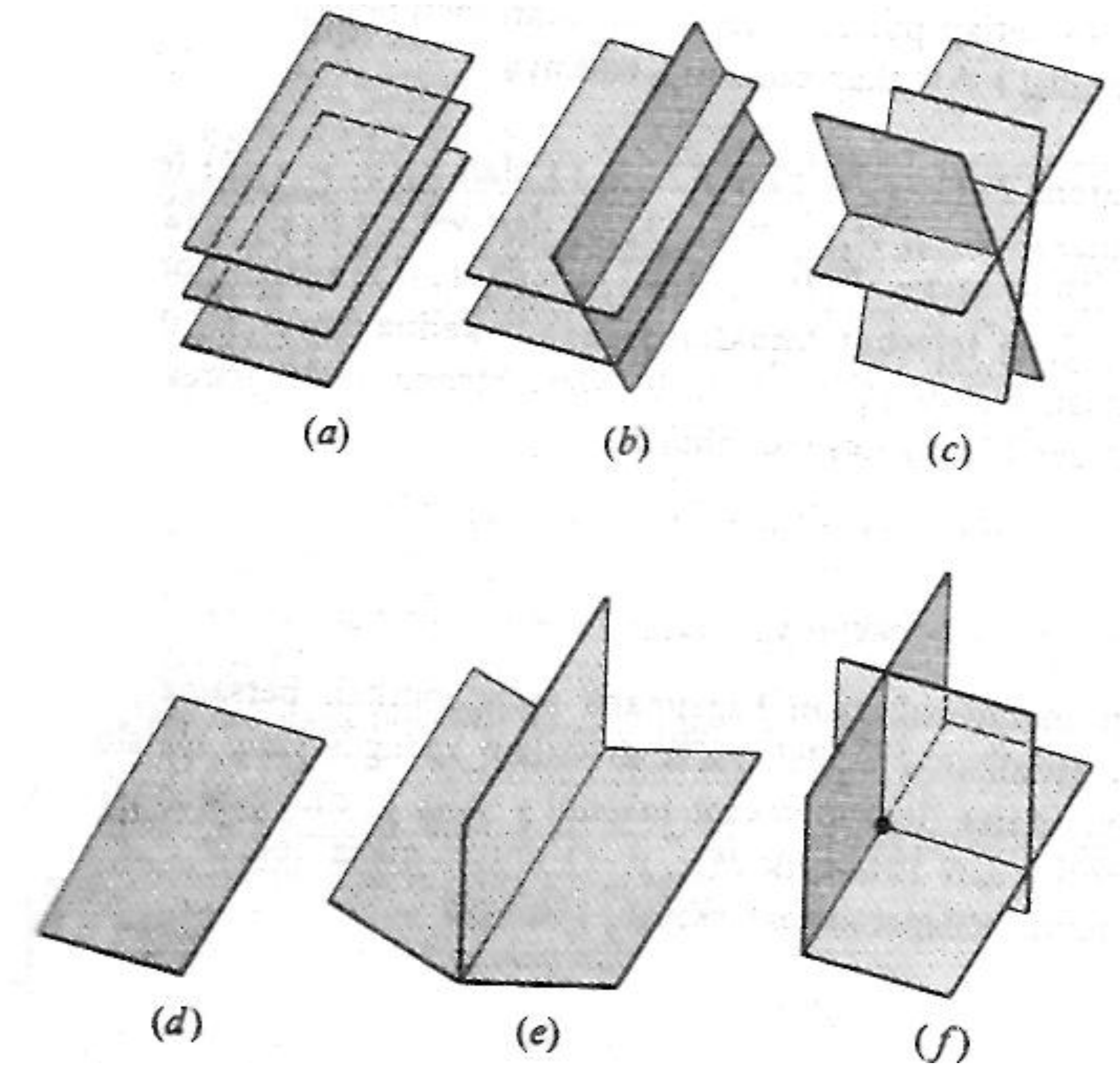
Pengertian geometris:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$



Pengertian geometris:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$



Yang tidak memiliki solusi: (a), (b), (c)
Yang memiliki banyak solusi: (d), (e)
Yang memiliki solusi tunggal: (f)

Ruang Vektor

Ruang vektor V adalah himpunan vektor tak kosong di mana 2 operasi berlaku: penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

Setiap dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dan kombinasi liniernya $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, α dan β bilangan real, merupakan anggota dari V, dan memenuhi sifat berikut:

untuk operasi penjumlahan:

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$2. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$3. \vec{a} + 0 = \vec{a}$$

$$4. \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$

untuk perkalian dengan skalar:

$$1. c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

$$2. (c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$$

$$3. c(k\vec{a}) = (ck)\vec{a}$$

$$4. 1\vec{a} = \vec{a}$$

Contoh ruang vektor: R^n, ruang vektor (matriks) M_{2x2}, ruang vektor M_{mxn}.

Ruang bagian :

Diketahui W himpunan bagian tak kosong dari V. W disebut ruang bagian jika W adalah ruang vektor dengan operasi yang sama digunakan di V.

Contoh: Himpunan garis yang melewati titik origin adalah ruang bagian dari R^3.

Kombinasi Linier

Suatu vektor $\vec{w}$ disebut kombinasi linier dari vektor-vektor $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ jika dapat dituliskan

$$\vec{w} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_m\vec{a}_m$$

dimana $c_1, c_2, \cdots, c_m$ adalah skalar.

Contoh: Diketahui vektor $\vec{u}$ = (1,2,-1) dan $\vec{v}$ =(6,4,2) di R^3.

Apakah vektor berikut kombinasi linier dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$?

(a) $\vec{w}$ **=(9,2,7),**

(b) $\vec{y}$ **=(4,-1,8).**

Span (membangun) ruang vektor

Himpunan vektor S={ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ } di sebut membangun V jika setiap $\vec{v}$ anggota dari V dapat dinyatakan dalam kombinasi linier dari $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, yaitu

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_m\vec{a}_m$$

Contoh: Apakah himpunan vektor T={ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ } membangun $\Re^3$?

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bebas linier

Diketahui S={ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ }, persamaan vektor

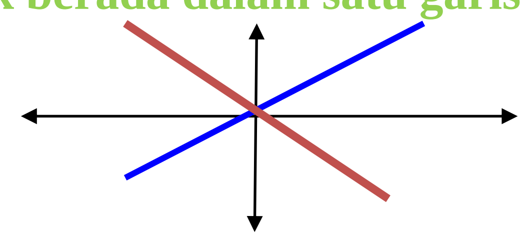
$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_m\vec{a}_m = 0$$

paling sedikit punya satu solusi yaitu $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0$.

Jika $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0$ adalah satu-satunya solusi maka S disebut bebas linier.

Arti geometris dari bebas linier:

- **Di R^2 dan R^3, misal 2 vektor digambar pada ruang koordinat dengan titik asal berada di titik origin. Himpunan 2 vektor itu bebas linier jika dan hanya jika kedua vektor tidak berada dalam satu garis.**



- **Di R^3, misal 3 vektor digambar pada ruang koordinat dengan titik asal berada di titik origin. Himpunan 3 vektor itu bebas linier jika dan hanya jika ketiga vektor tidak berada dalam satu bidang.**

Misal S={ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ } himpunan vektor di R^n, jika m > n maka S bergantung linier.

Contoh: Apakah himpunan vektor T={ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ } bebas linier di $\Re^3$?

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Basis

Basis dari V adalah minimum himpunan vektor bebas linier yang membangun V.

Jika V adalah ruang vektor dan S={ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ } adalah himpunan vektor di V. S adalah basis dari V jika

1. **S bebas linier**
2. **S membangun V.**

Ruang vektor dapat mempunyai lebih dari satu basis.
Contoh: Standard basis

- **Di R^3: $\hat{i}$ =(1,0,0), $\hat{j}$ =(0,1,0), $\hat{k}$ (0,0,1).**
- **Di R^n: $\vec{e}_1$ =(1,0,0,…,0), $\vec{e}_2$ =(0,1,0,…,0) , … , $\vec{e}_n$ =(0,0,…,0,1)**
- **Di ruang matriks** $M_{2x2}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Contoh:

1. **Karena T={ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ } bebas linier dan membangun di $\Re^3$ maka T merupakan basis di $\Re^3$.**

2. Tunjukkan bahwa setiap vektor di $\Re^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari basis baku dan basis T.

Contoh: carilah sebuah subhimpunan dari vektor-vektor

$\vec{r}_1 = (1,-2,0,3),\ \vec{r}_2 = (2,-5,-3,6),\ \vec{r}_3 = (0,1,3,0), \vec{r}_4 = (2,-1,4,-7), \vec{r}_5 =$

yang membentuk sebuah basis untuk ruang yang dibangun oleh vektor-vektor di atas.

Dimensi

Himpunan vektor V disebut berdimensi hingga jika memuat himpunan vektor berhingga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ yang merupakan basis dari V. Dimensi dari V adalah n.

Ruang baris dan ruang kolom sebuah matriks; Rank

Definisi:

Misal diberikan matriks mxn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vektor-vektor

$$\vec{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}),$$
$$\vec{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}),$$
$$\vdots$$
$$\vec{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

yang dibentuk dari baris-baris dari A dinamakan vektor-vektor baris dari A,
sedangkan vektor-vektor

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \vec{c}_m = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

yang dibentuk dari kolom-kolom dari A dinamakan vektor-vektor kolom dari A.

Subruang di $\Re^n$ yang dibangun oleh vektor-vektor baris disebut ruang baris (row space).

Subruang di $\Re^m$ yang dibangun oleh vektor-vektor kolom disebut ruang kolom (column space).
Teorema: Operasi Baris Elementer (OBE) tidak mengubah ruang baris suatu matriks.

Vektor-vektor baris yang tak nol di dalam bentuk eselon baris dari matriks A membentuk suatu basis dari ruang baris A. Sedangkan vektor-vektor kolom yang tak nol di dalam bentuk eselon baris dari matriks A^t membentuk suatu basis dari ruang kolom A.

Contoh: cari basis dari masing-masing ruang baris dan ruang kolom dari A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Jika A adalah sembarang matriks, maka ruang baris dan ruang kolom dari A memiliki dimensi yang sama.

Dimensi dari ruang baris dan ruang kolom dari sebuah matriks A dinamakan rank dari A.

Latihan:

1. **Tunjukan vektor-vektor berikut bebas linier: (-1 4 0), (8 4 -3),(0 6 -9)**
   Pilih sembarang vektor (u v w), apakah keempat vektor bebas linier?
2. **Tunjukan mana himpunan yang merupakan basis di R^2.**
   $a.\ u_1 = (2,1), u_2 = (0,3),$
   $b.\ w_1 = (3,9), w_2 = (-4,12)\cdot$
3. **Tunjukan himpunan vektor** $p_1 = 1 + x + x^2,\ p_2 = x - 1$
   bukan merupakan basis di ruang vektor P_2.
4. **Tentukan basis dan dimensi untuk ruang solusi dari SPL homogen berikut:**

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$
$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$-x_1 + x_3 = 0.$$