Ruang Hasil Kali Dalam

Tujuan:

1. **Memahami Ruang Euclid sebagai contoh dari Ruang Hasil Kali Dalam.**
2. **Memahami definisi umum Ruang Hasil Kali Dalam dan sifat-sifatnya.**
3. **Memahami definisi norm, jarak, keortogonalan.**
4. **Memahami himpunan orthogonal dan orthonormal.**

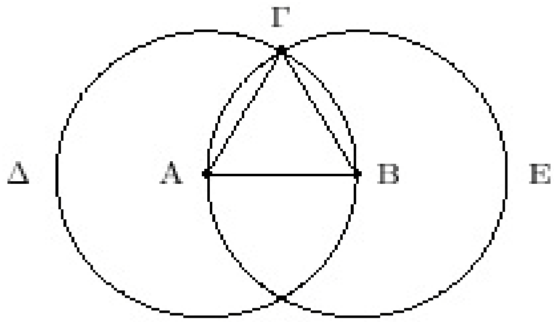
Ruang Euclid

Dipelopori oleh Euclid of Alexandria (Greek: Εὐκλείδης) (c. 325–c. 265 BC), menulis buku *The Element* berisi 6 postulat, diantaranya:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



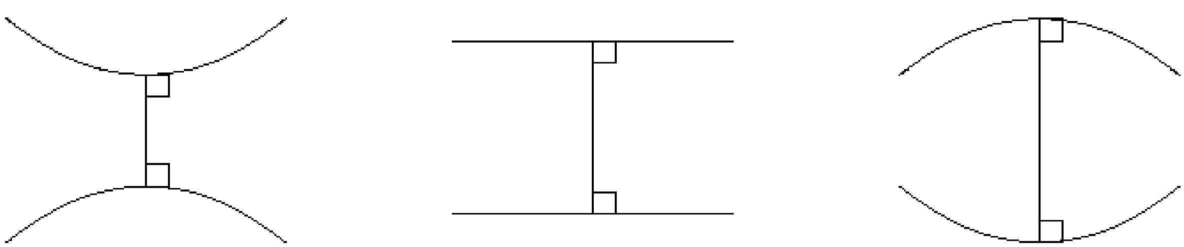
Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ: πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση: ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα: καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Geometri Euclid menjadi satu-satunya bentuk geometri sampai pada awal abad ke -19 dimana diterima adanya geometri Non-Euclid, yang didasarkan perbedaan pengertian 2 garis sejajar/parallel.



Hyperbolic Euclidean Elliptic

Ruang Euclid R^n **:**

- merupakan ruang vektor karena dapat dilakukan 2 operasi: penjumlahan dan perkalian dengan scalar, sehingga 8 aksioma berlaku.

- merupakan ruang hasil kali dalam karena mempunyai operasi hasil kali dalam (bernama perkalian titik untuk ruang Euclid):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

untuk setiap $\vec{u}$ **dan** $\vec{v}$ **vektor di** R^n **.**

Sifat-sifat perkalian titik:

Jika $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ **dan** $\vec{w}$ **adalah vektor di** R^n **, k adalah skalar**

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$
4. $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ **jika** $\vec{v} \neq 0$**, dan** $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ **jika** $\vec{v} = 0$

Norm: panjang dari vektor $\|\vec{v}\| = (\vec{v} \bullet \vec{v})^{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$

Jarak antara 2 vektor: $d(u,v) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

Ruang Hasil Kali Dalam (umum):

Definisi: suatu hasil kali dalam pada suatu ruang vektor real V adalah suatu fungsi yang mengaitkan dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di V dengan suatu bilangan Real, diberi symbol $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, sehingga berlaku aksioma di bawah ini. Untuk $\vec{u}$, $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ di V,

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
2. $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
3. $\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
4. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ **dimana** $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ **jika dan hanya jika** $\vec{v}$ **=0.**

Contoh hasil kali dalam :

1. **Perkalian titik di ruang Euclid.**
2. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$
3. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n$ **di mana** $w_1, w_2, \cdots, w_n$ **adalah bilangan real positif, disebut bobot (weight).**

Contoh bukan hasil kali dalam:

4. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3u_1v_2 + 2u_2v_1$

Norm (panjang) vektor di ruang hasil kali dalam: $\|\vec{v}\| = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{1/2}$

Jarak antara 2 vektor: $d(u,v) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle^{1/2}$

Latihan:

Hasil Kali Dalam (hkd) Euclid berbobot: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$

- Tunjukan hkd tersebut memenuhi 4 aksioma hasil kali dalam.

- Tuliskan definisi dari norm dan jaraknya.

Sudut antara dua vektor: $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$

Dua vektor $\vec{u}$ **dan** $\vec{v}$ **orthogonal jika:** $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$**=0.**

\\Teorema Pythagoras yang diperumum: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Definisi: Suatu himpunan vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam disebut himpunan *orthogonal* jika setiap pasangan berbeda dari himpunan tersebut orthogonal.

Suatu himpunan orthogonal di mana setiap vektornya bernorm 1 (satu) disebut orthonormal.

Misal : $\overrightarrow{u_1} = (0,1,0), \overrightarrow{u_2} = (1,0,1), \overrightarrow{u_3} = (1,0,-1)$ **pada ruang Euclid yang memiliki perkalian titik.**

1. Tunjukan himpunan $S = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right\}$ **orthogonal.**

2. Apakah S orthonormal? Ubah S menjadi himpunan orthonormal.

3. Apakah S dapat menjadi basis?

Dalam ruang hasil kali dalam, suatu basis yang terdiri dari vektor orthonormal disebut basis orthonormal.

TEOREMA:

Jika $S = \left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n} \right\}$ adalah suatu basis orthonormal untuk ruang hasil kali dalam **V**, dan $\vec{u}$ adalah sebarang vektor di V, maka

$$\vec{u} = \left\langle \vec{u}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle \overrightarrow{v_1} + \left\langle \vec{u}, \overrightarrow{v_2} \right\rangle \overrightarrow{v_2} + \cdots + \left\langle \vec{u}, \overrightarrow{v_n} \right\rangle \overrightarrow{v_n}$$

Artinya: $\vec{u}$ merupakan kombinasi linier dari $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ dengan masing-masing koefisiennya adalah $\left\langle \vec{u}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle, \left\langle \vec{u}, \overrightarrow{v_2} \right\rangle, \cdots, \left\langle \vec{u}, \overrightarrow{v_n} \right\rangle$.

Latihan:

Jika $\vec{p} = 1 + 2x^2$, $\vec{q} = 3 + x + x^2$ dan $\vec{v} = 3 - x + 2x^2$ adalah tiga vektor di P_2 (ruang vektor polinom berderajat dua), dan hasil kali dalam

$$\left\langle \vec{p}, \vec{q} \right\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

Apakah himpunan tiga vektor itu orthonormal?