Medan Skalar

Tujuan:

1. **Mengetahui perbedaan antara medan skalar dan medan vektor.**
2. **Memahami turunan parsial, arti fisis dan geometri turunan parsial, metode kuadrat terkecil (*Kalkulus II, baca sendiri*)**
3. **Memahami dan mahir menghitung vektor gradient dan aturan rantai.**
4. **Memahami dan mahir menghitung turunan berarah, arti fisis dan geometri turunan berarah**

Misal P(x,y,z) suatu titik di ruang
Fungsi skalar: f=f(P) di R
Fungsi vektor: v = v(P) = $(v_1(P), v_2(P), v_3(P))$ **di** R^3
Fungsi skalar mendefinisikan Medan Skalar pada daerah definisinya, contohnya: medan temperatur tubuh, medan tekanan udara di atmosfir.
Fungsi vektor mendefinisikan Medan Vektor pada daerah definisinya, contohnya: medan vektor tangen, medan gravitasi.

Gradient dari medan skalar:
Grad f dari fungsi skalar f(x,y,z) adalah fungsi vektor:

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Biasa dinyatakan dalam bentuk operator:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

dimana ∇ **dibaca nabla atau del.**
Grad f adalah vektor

Aturan Rantai:

Jika w = f(x,y,z) dimana x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), maka turunan pertama terhadap u dan v adalah

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Jika w = f(x,y,z) dimana x=x(u), y=y(u), z=z(u), maka turunan pertama terhadap u adalah

$$\frac{dw}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{du}$$

Turunan Berarah:

Turunan berarah f terhadap vektor $\vec{b}$ **, atau** $D_{\vec{b}} f = df/ds$ **, adalah laju perubahan f pada suatu titik P dalam arah vektor** $\vec{b}$ **.**

$$D_{\vec{b}} f = \frac{df}{ds} = \lim_{s\to 0}\frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

Q suatu titik dimana vektor C=$\overrightarrow{QP}$ **searah dengan** $\vec{b}$ **, dan s jarak antara Q dan S.**

Misal $\vec{b}$ **vektor unit. Jika C dinyatakan dalam vektor**

$$r(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + z(s)\hat{k} = \vec{p}_0 + s\vec{b}$$

dimana $\vec{p}_0$ **adalah vektor posisi dari P.**

$$D_{\vec{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'$$

tapi diketahui $r' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} = \vec{b}$ **maka**

$$D_{\vec{b}} f = \frac{df}{ds} = \vec{b} \bullet grad\ f$$

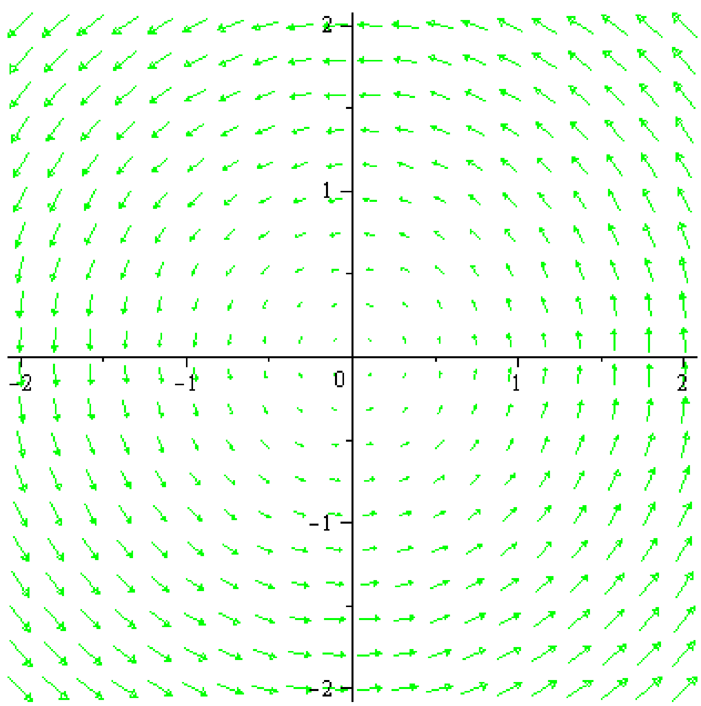
Contoh: cari turunan berarah dari $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ **pada titik P(2,1,3) dalam arah vektor** $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{k}$

Misal f(P)=f(x,y,z) fungsi skalar memiliki turunan parsial pertama. Jika gradient f di titik P tidak nol, maka gradien tersebut merupakan arah peningkatan maksimum nilai f di titik P.

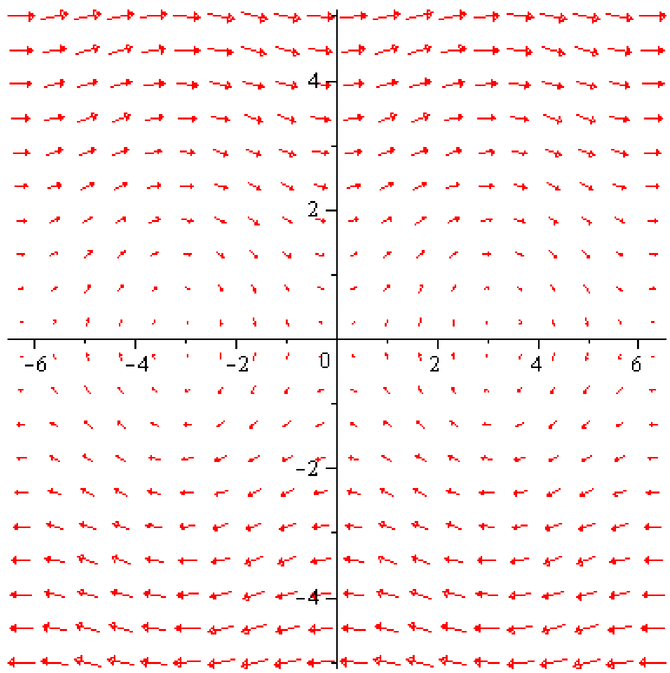
Contoh-contoh:

Medan Vektor

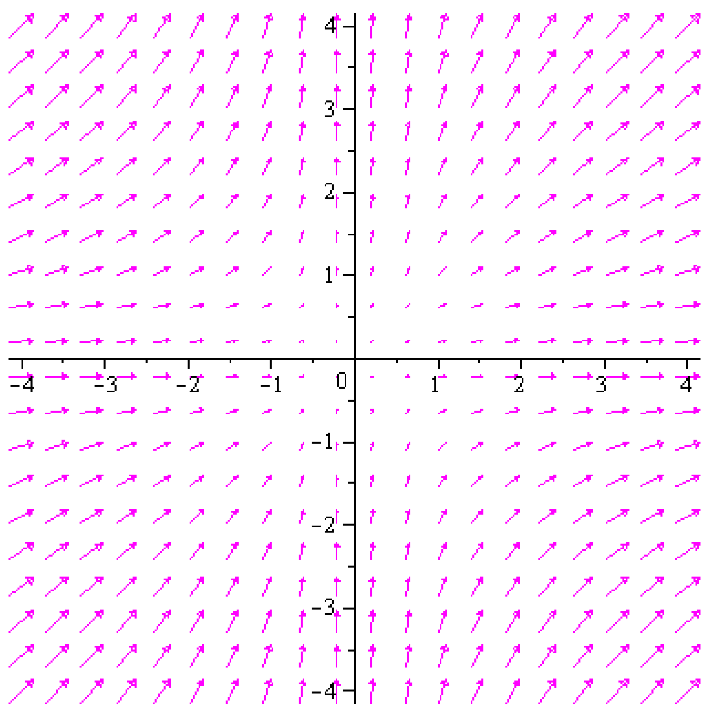
$f(x,y) = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}$



$$f(x,y) = y\,\hat{\imath} + \sin(x)\,\hat{\jmath}$$

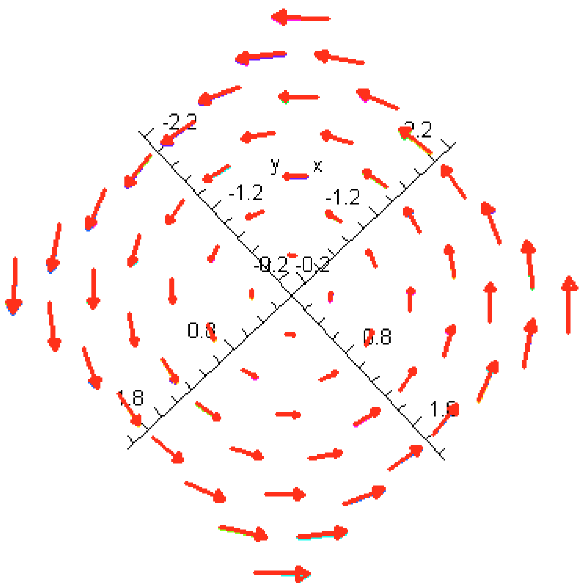


$$f(x,y) = \ln\left(1+x^2\right)\hat{\imath} + \ln\left(1+y^2\right)\hat{\jmath}$$

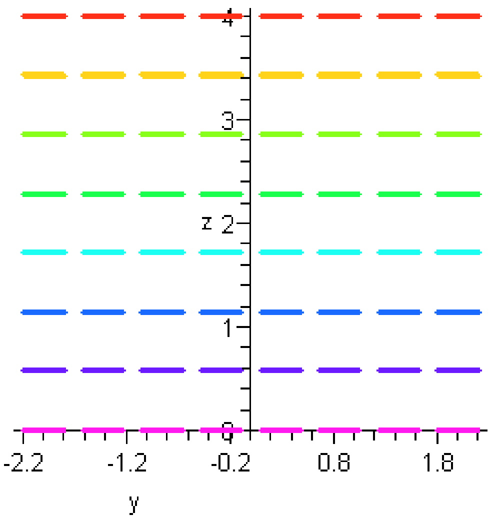


HURICANE : $f(x,y,z) = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$

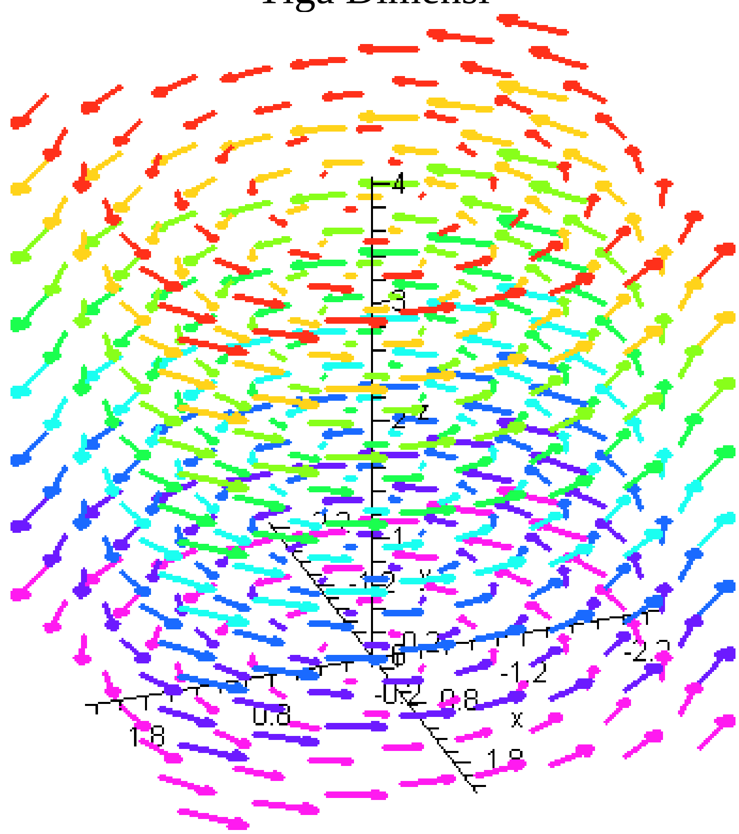
Bidang XOY



Bidang YOZ

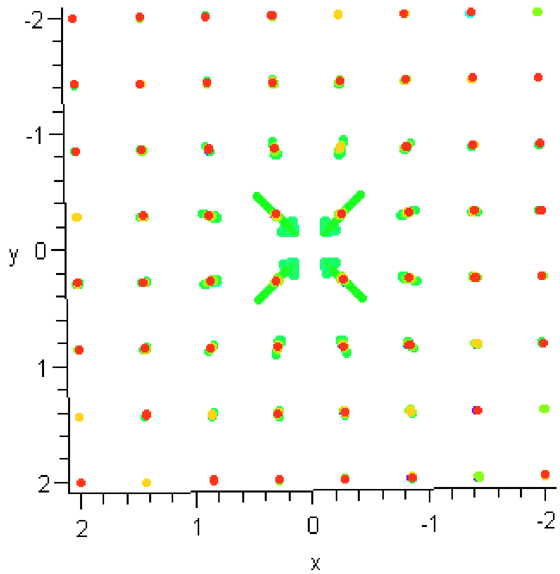


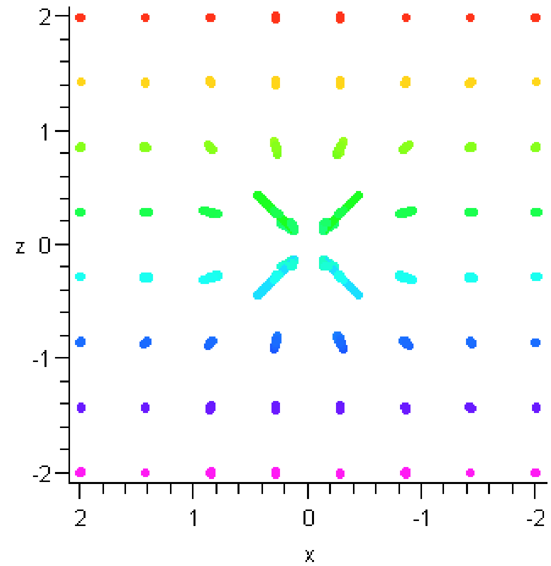
Tiga Dimensi



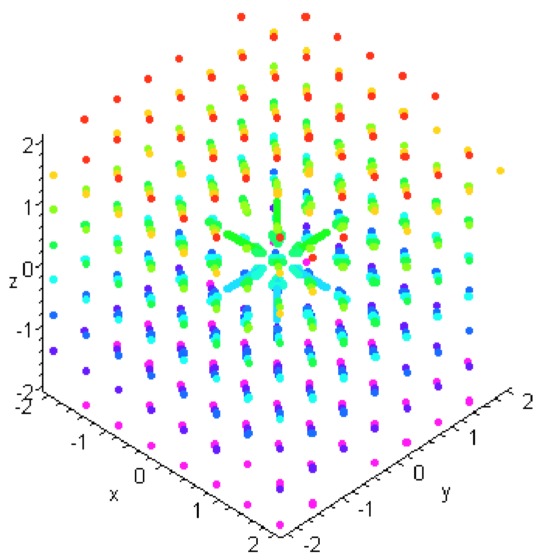
Gravity: $f(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$

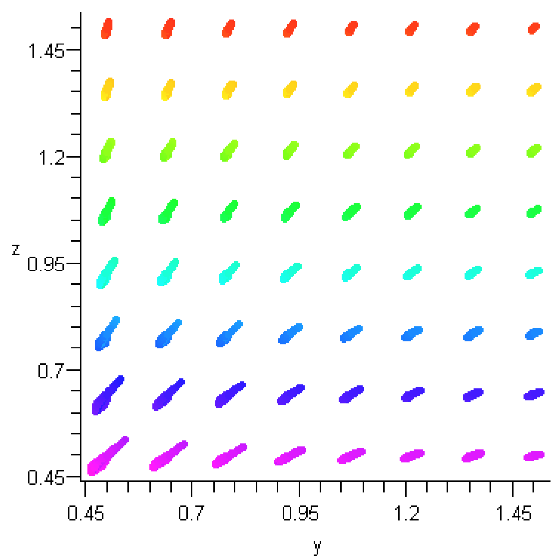
Bidang XOY Bidang XOZ





Tiga Dimensi Pada kuadran pertama bidang YOZ



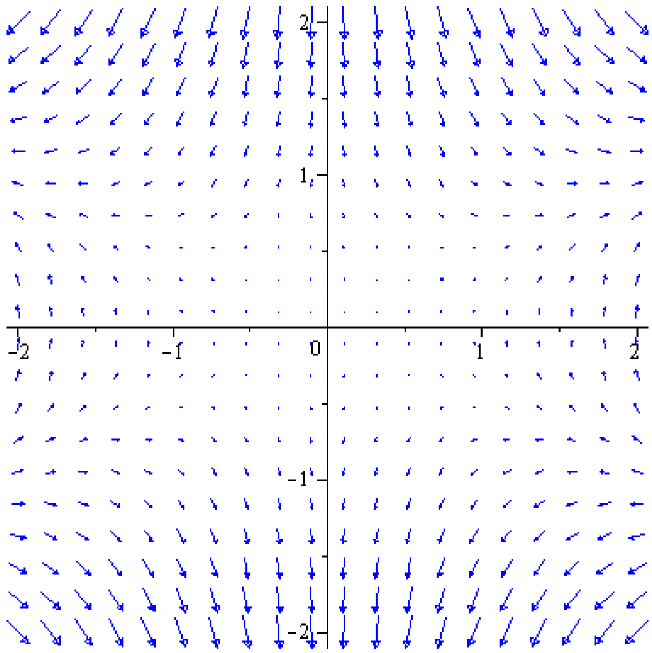


MEDAN GRADIEN

$$f(x,y) = x^2y - y^3$$

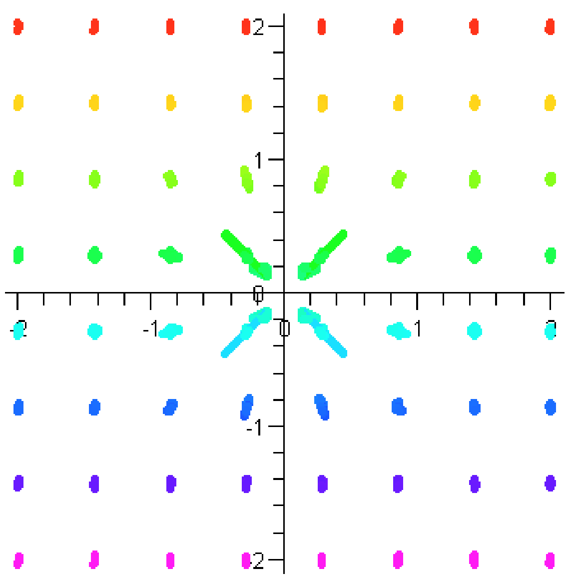
Untuk x dan y bertanda sama: arah thd x selalu ke kanan

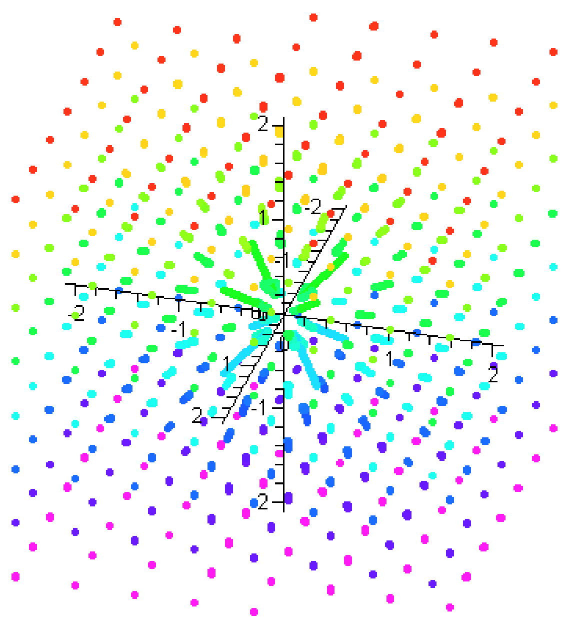
Untuk x dan y berbeda tanda: arah thd x selalu ke kiri
Apabila turunan parsial thd y >0 maka arah ke atas
Apabila turunan parsial thd y < 0 maka arah ke bawah



$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Bidang XOZ





Latihan:

1. Tuliskan persamaan parameter untuk garis lurus melalui titik (2,0,4) dan (-3,0,9).
2. Diberikan curva r(t) dan titik P:

   $\mathbf{r}(t) = [3\cos t,\quad 3\sin t,\quad 4t],\quad P\colon (3, 0, 8\pi)$

   Carilah vektor singgung r'(t) di titik P, sketsa gambarnya di bidang XOY dan dimensi 3.
3. Tentukan kurva isoterm (kurva yang memiliki suhu konstan T) dari fungsi berikut: a. T = xy b. $T = \frac{y}{x^2+y^2}$
4. Gambarkan medan vektor dari

   $\mathbf{v} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$.
5. Diberikan $f = x^2 + y^2 - z,\ P\colon (1, 1, -2),\ \mathbf{a} = [1, 1, 2]$. Tentukan turunan berarah f terhadap vektor a di titik P.