

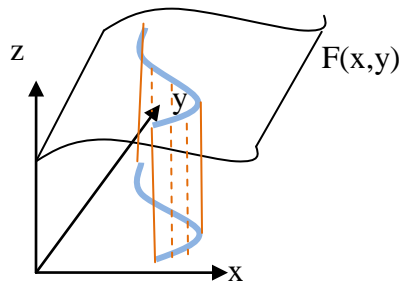
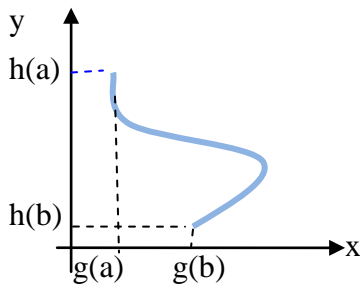
Integral Garis

Tujuan:

1. Mengingat kembali integral garis di bidang dan ruang, serta mahir menghitungnya.
2. Memahami arti fisis integral garis.

$\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ disebut integrand. Mencari luas daerah dibawah grafik kurva fungsi $f(x)$ dari $x=a$ dan $x=b$.

$\int_C f(x, y)ds$: integral garis dimana C adalah suatu kurva yang dibentuk oleh persamaan parameter: $x=g(t)$, $y = h(t)$, $t=a$ dan $t=b$.



Untuk menghitung: panjang garis/kurva C, luas tirai di bawah kurva, distribusi temperatur sepanjang suatu kurva dll

Contoh:

Hitunglah integral garis pada lintasan C:

$x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ pada permukaan $f(x, y) = xy$

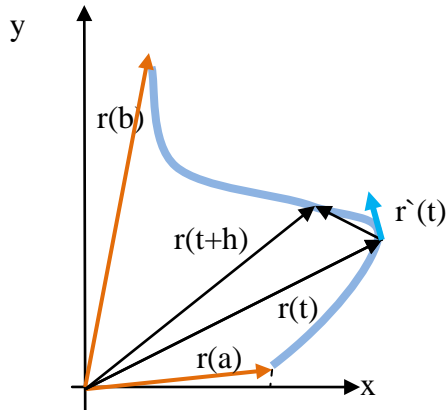
$\int_C F(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$: integral garis dimana C adalah suatu kurva

dinyatakan sebagai fungsi vektor posisi:

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

C : jalur integrasi, $r(a)$ titik awal, $r(b)$ titik akhir.

Arah positif: t bertambah, arah negatif: t berkurang



$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} \hat{i} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{y}(t+h) - \vec{y}(t)}{h} \hat{j} + \dots \end{aligned}$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Definisi :

Suatu integral garis dari fungsi vektor $F(r)$ sepanjang kurva C didefinisikan sebagai berikut:

$$\int_C F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

atau, bila $d\vec{r}(t) = [dx, dy, dz]$ maka

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z') dt$$

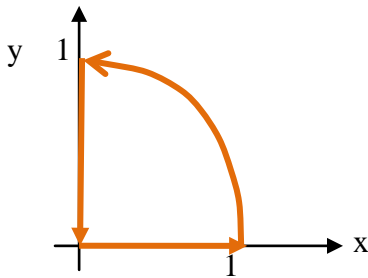
Jika C jalur tertutup maka tulis \oint_C .

Ingat: integrand adalah SKALAR bukan vektor.

Contoh:

Hitung nilai integral garis di bidang

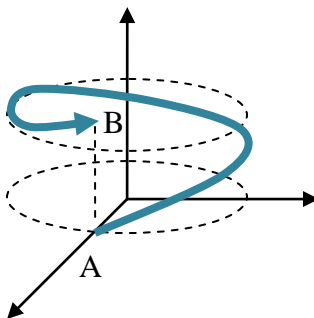
$\vec{F}(t) = [-y, -xy] = -y\hat{i} - xy\hat{j}$ dan C adalah jalur pada gambar di kiri bawah.



Latihan:

1. Hitung nilai integral garis di ruang

$\vec{F}(t) = [z, x, y] = z\hat{i} + 2x\hat{j} + y\hat{k}$ sepanjang jalur dari A sampai B pada helix di gambar bawah ini.



Helix: $\vec{r}(t) = [\cos t, \sin t, t]$

2. Hitung integral garis dari

$$\vec{F}(t) = [5z, xy, x^2 z] = 5z\hat{i} + xy\hat{j} + x^2 z\hat{k}$$

sepanjang dua jalur di bawah ini:

(a) **C garis lurus** $\vec{r}(t) = [t, t, t] = t\hat{i} + t\hat{j} + t\hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$

(b) **C* parabola** $\vec{r}(t) = [t, t, t^2] = t\hat{i} + t\hat{j} + t^2\hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$