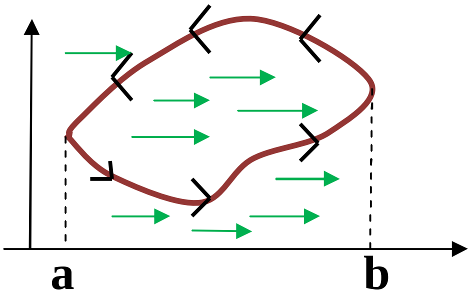
PDF-XChange
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Teorema Green: menghubungkan suatu integral atas suatu himpunan S ke integral lain atas batas S atau δS.

Teorema Green:

Misal suatu medan vektor $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i}$ **, akan dihitung** $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = ?$ **tanpa melibatkan variabel t dan berhubungan dengan integral lipat.**



$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b P(x, y_1(x))dx + \int_b^a P(x, y_2(x))dx$$

$$= \int_a^b P(x, y_1(x))dx - \int_a^b P(x, y_2(x))dx$$

$$= -\int_a^b \big(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\big)\,dx$$

$$= -\int_a^b P(x, y(x))\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\,dx = -\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dydx$$

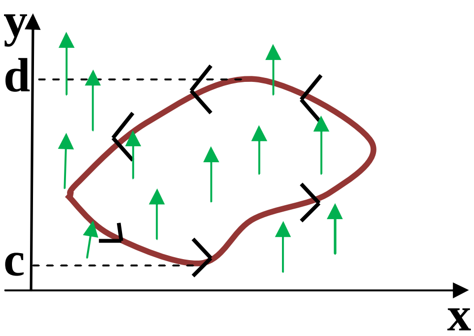
Jadi: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dydx = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$ **untuk**

$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i}$

PDF-XChange Click to buy NOW! www.docu-track.com

Integral garis pada lintasan tertutup sama dengan volume dengan domain luas daerah yang terbentuk oleh lintasan tertutup itu, dan tingginya adalah $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Bagaimana bila $\vec{F}(x,y)=Q(x,y)\,\hat{j}$ **?**



$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_d^c Q(x_1(y),y)dy + \int_c^d Q(x_2(y),y)dy$$

$$= -\int_c^d Q(x_1(y),y)dy + \int_c^d Q(x_2(y),y)dy$$

$$= \int_c^d \big(Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)\big)\,dy$$

$$= \int_c^d Q(x(y),y)\Big|_{x=x_1(x)}^{x=x_2(x)} dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$$

Jadi: $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$ **untuk**

$$\vec{F}(x,y)=Q(x,y)\,\hat{j}$$

PDF-XChange Click to buy NOW! www.docu-track.com

Integral garis pada lintasan tertutup sama dengan volume dengan domain luas daerah yang terbentuk oleh lintasan tertutup itu, dan tingginya adalah $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ **.**

Bagaimana bila $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ **?**

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Teorema Green: Apabila lintasan C dijalani dengan arah kebalikan arah jarum jam maka $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Ingat : Bila medan vektor $\vec{F}$ **konservatif maka** $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

Jadi $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0$ **atau** $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Contoh:

1. **Hitunglah** $\oint_C (x^2 - y^2)dx + 2xydy$ **dengan lintasan C merupakan batas dari daerah R :**
   $\{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 2x\}$

   (Ingat lintasan dijalani berlawanan arah dengan arah jarum jam agar bisa menerapkan Teorema Green).

Bagaimana bila lintasan dijalani searah dengan jarum jam?

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dA$$

Contoh:

Menggunakan Teorema Green dan cara biasa, hitunglah $\oint_C 2y\,dx - 3x\,dy$ **dengan lintasan C :**

$$x(t) = \sin t, \quad y(t) = \cos(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$