Integral trigonometri:

1. $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$

- Bila n ganjil: pisahkan $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$ dan gunakan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Bila n genap: gunakan rumus setengah sudut:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ dan } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

2. $\int \sin^m x \cos^n \mathrm{x}\, dx$

- salah satu dari m atau n ganjil
- m dan n genap

3. $\int \sin mx \cos n\mathrm{x}\, dx, \int \sin mx \sin n\mathrm{x}\, dx, \int \cos mx \cos n\mathrm{x}\, dx$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$$
$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right)$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$$

Contoh: Tentukan $\int \sin^3 x \cos^{-4} x\;\; dx$, $\int \cos y \cos 4y\;\; dy$

Substitusi yang merasionalkan:

1. Integran yang memuat bentuk irrasional: $\sqrt[n]{ax+b}$

   Substitusi u = $\sqrt[n]{ax+b}$ lalu ubah integran menjadi bentuk rasional $x = \left(u^n - b\right)/a$ dan cari du.

   Contoh: Tentukan $\int x\sqrt{x+3}\; dx$.

2. Integran yang memuat bentuk irrasional: $\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$

   Untuk jenis yang kedua dapat dilihat bahwa perubahan bentuk integran akan mengarah pada penggunaan ketaksamaan phytagoras

(a). $a^2\cos^2 t = a^2 - a^2\sin^2 t$ untuk bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$.

Gunakan substitusi $x = a\sin t$ sehingga diperoleh

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$ dengan pembatasan $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Misal: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot d(a\sin t) = \int a\cos t \cdot a\cos t\ dt = a^2 \int \cos^2 t\ dt$

Selesaikan bentuk akhir dengan teknik sebelumnya lalu kembalikan ke x dengan $t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$.

(b). $a^2\sec^2 t = a^2 + a^2\tan^2 t$ untuk bentuk $\sqrt{a^2 + x^2}$.

Gunakan $x = a\tan t$ sehingga diperoleh

$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\tan^2 t} = \sqrt{a^2\sec^2 t} = a\sec t$ dengan pembatasan $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

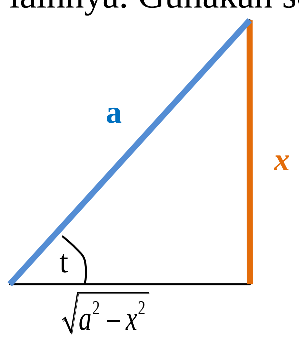
(c). $a^2\tan^2 t = a^2\sec^2 t - a^2$ untuk bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$.

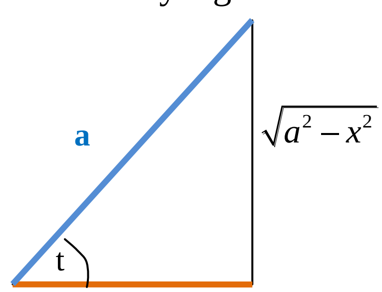
Gunakan $x = a\sec t$ sehingga diperoleh

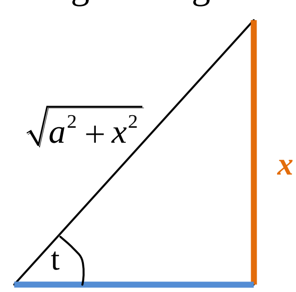
$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t} = a\tan t$ dengan $0 \le t \le \pi, t \ne \pi/2$

Untuk mengembalikan ke peubah x akan diperoleh $t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ atau $t = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

Masalah muncul apabila kita mendapatkan bentuk $\cos t = \cos\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$, $\sin t = \sin\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)$ atau lainnya. Gunakan segitiga berikut ini yang cocok dengan masing-masing substitusi







$x = a\sin t$

$\frac{x}{a} = \sin t$

$x = a\cos t$

$\frac{x}{a} = \cos t$

$x = a\tan t$

$\frac{x}{a} = \tan t$

Kiri: $\cos t = \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$.

Kanan: $\sec t = \sec\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{a/\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$.

Contoh: Tentukan $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx$

Integral Fungsi Rasional

1. Faktorisasi penyebut menjadi bentuk linier dan kuadrat yang tidak dapat diuraikan lagi.

   Contoh: Penyebut $x^3 - 8x^2 + 16x = x(x-4)^2$
2. Apabila pada penyebut ada faktor yang berlainan, misal (x-a)(x-b) didekomposisi menjadi: $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-b)}$

   Koefesien A_1, A_2 diperoleh dari penyamaan penyebut. Prosesnya akan diterangkan kemudian.
3. Untuk tiap faktor yang berbentuk $(ax+b)^k$ dekomposisi menjadi bentuk $\frac{B_1}{(ax+b)} + \frac{B_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(ax+b)^k}$
4. Untuk tiap faktor berbentuk $(ax^2+bx+c)^m$ dekomposisi menjadi bentuk $\frac{D_1x+E_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{D_2x+E_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{D_mx+E_m}{(ax^2+bx+c)^m}$

Contoh: $\int \frac{1}{x^3 - 8x^2 + 16x}\,dx$