Bidang Singgung, Aproksimasi

Definisi:

Misal F(x,y,z)=k menentukan suatu permukaan dan misal F dapat dideferensialkan di sebuat titik $P(x_0, y_0, z_0)$ dari permukaan dengan $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Bidang singgung permukaan di P adalah bidang yang melalui P dan tegak lurus terhadap $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Ke mana arah dari $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$?

Misal $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ adalah kurva pada bidang singgung dan $\frac{d\bar{r}}{dt}$ gradien garis singgungnya di suatu titik , maka

$$\nabla F \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = 0$$

Teorema A:

Untuk permukaan F(x,y,z)=k, persamaan bidang singgung di (x_0, y_0, z_0) adalah

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Khusus untuk permukaan z = f(z,y), persamaan bidang singgung di $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ adalah $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Contoh:

Cari persamaan bidang singgung dan garis normal terhadap permukaan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 23$ di (1,2,3).

Diferensial dan Hampiran

Ingat: cara menghitung $\sqrt{x}$ di x = 10 ?

Lalu bagaimana $\sqrt{x + y}$ di x = 9,1 dan y = 16,01 ?

Definisi:

Misal z = f(x,y) dengan f fungsi dapat dideferensialkan, dan andai dx dan dy (disebut diferensial dari x dan y) berupa peubah.

Diferensial dari peubah tak bebas dz disebut juga diferensial total adalah

$$dz = df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

Contoh:

Andaikan $z = 2x^2 y^3$. Hitung Δz dan dz bila (x,y) berubah dari (1,1) ke (0,99 , 1,02).

Maksimum dan Minimum

Definisi:

Andaikan P_0 suatu titik di S daerah asal f.

(a) $f(P_0)$ adalah nilai maksimum (global) dari f pada S jika $f(P_0) \geq f(P)$ untuk semua P di S.

(b) $f(P_0)$ adalah nilai minimum (global) dari f pada S jika $f(P_0) \leq f(P)$ untuk semua P di S.

(c) $f(P_0)$ adalah nilai ekstrim (global) dari f pada S jika $f(P_0)$ nilai maksimum (global) atau minimum (global).

Nilai maksimum global dan nilai minimum ada jika f kontinu pada suatu himpunan tertutup dan terbatas.

Nilai ekstrim terjadi pada titik kritis. Titik-titik kritis pada S ada 3 jenis:

1. **Titik-titik pada batas S.**
2. **Titik-titik stasioner:** $\nabla F(P_0) = 0$ **bidang singgung mendatar**
3. **Titik-titik singular: di mana f tidak dapat dideferensialkan.**

Syarat cukup untuk nilai maksimum dan minimum (uji turunan parsial kedua):

Jika f(x,y) punya turunan parsial kedua dan $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$. **Definisikan**

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

maka

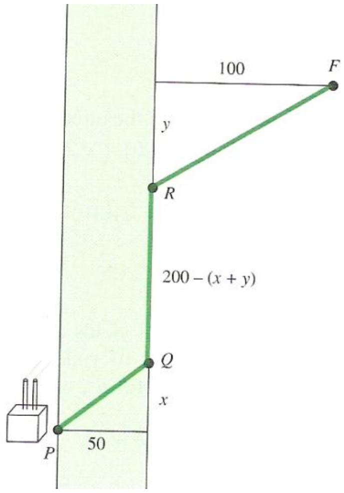
1. **Jika D > 0 dan** $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ **maka** $f(x_0, y_0)$ **adalah nilai maksimum lokal.**
2. **Jika D > 0 dan** $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ **maka** $f(x_0, y_0)$ **adalah nilai minimum lokal.**
3. **Jika D < 0 maka** $f(x_0, y_0)$ **bukan nilai ekstrim, dan** (x_0, y_0) **adalah titik saddle.**
4. **Jika D = 0 pengujian tidak ada kesimpulan.**

Contoh1:

Tentukan nilai ekstrim, jika ada, untuk fungsi $F(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$ **pada** $\boldsymbol{R}^2$**.**

- **Terlebih dahulu tentukan titik kritisnya dengan mencari (x,y) :**
- **Titik batas tidak ada, titik singular tidak ada (karena f fungsi polinom yang selalu punya turunan), titik stasioner:** $f_x(x, y) = 0$ dan $f_y(x, y) = 0$.
- **Hitung nilai D dan** $f_{xx}(x_0, y_0)$ **dan tentukan jenis dari keekstriman titik kritisnya.**

Contoh 2:



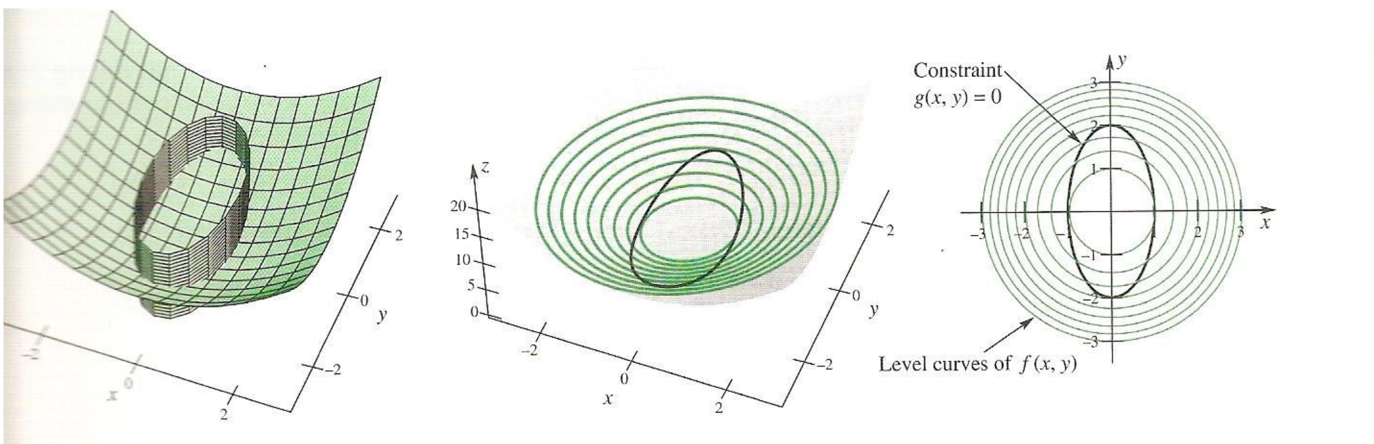
Kabel listrik akan dipasang dari menara listrik (P) ke suatu pabrik (F) yang lokasinya berseberangan dengan sungai yang dangkal. Lebar sungai adalah 50 m, pabrik berjarak 100 m dari sungai dan jarak vertikal antara pabrik dan menara adalah 200. Lihat gambarnya. Jika harga kabel di bawah air adalah Rp 600.000/m, harga kabel sepanjang sungai Rp 100.000/m, dan harga kabel dari sungai ke pabrik adalah Rp 200.000/m. Bagaimana cara meletakkan kabel sehingga ongkosnya minimum?

- Tentukan fungsi total ongkos yang diperlukan (harga x panjang kabel)
- Tentukan titik-titik kritisnya.

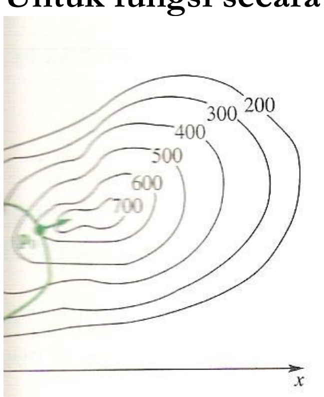
Metode Pengali Lagrange
Dua jenis masalah:

- **mencari nilai ekstrem bebas : nilai minimum dari** $f(x,y,z)=x^2+4y^2-4z^2+4$
- **mencari nilai ekstrem terkendala: nilai minimum dari fungsi obyektif** $f(x,y,z)=x^2+4y^2-4z^2+4$ **dengan kendala** $g(x,y,z)=x+3y-z=7$ **.**

Tafsiran Geometri dari Metode
Meminimumkan atau memaksimumkan $f(x,y)$**. Kurva ketinggiannya** $f(x,y)=k$**, dengan k konstanta. Kurva kendala** $g(x,y)=0$**. Maka memaksimumkan/ meminimumkan f berarti mencari perpotongan antara kurva ketinggian dan kurva kendala (gambar kiri), atau mencari titik dimana kurva ketinggian dan kurva kendala saling bersinggungan (=saling sejajar) (gambar kanan). Cari P dimana** $\nabla f(P)$ **dan** $\nabla g(P)$ **sejajar.**
Memaksimumkan : cari k terbesar
Meminimumkan: cari k terkecil.



Untuk fungsi secara umum



Metode Lagrange:
Untuk memaksimumkan / meminimumkan $f(P)$ **terhadap kendala** $g(P)=0$**,**
selesaikan system persamaan

$$\nabla f(P)=\lambda\nabla g(P) \text{ dan } g(P)=0$$

untuk P dan λ. Titik P adalah titik kritis untuk masalah ekstrem terkendala, dan disebut pengali Lagrange.

Contoh:

1. **Tentukan nilai minimum** $f(x,y)=x^2+y^2$ **terhadap** $g(x,y)=xy-3=0$.

PR:

1. **Tentukan semua titik kritis dari fungsi** $f(x,y)=x^2+4y^2-4x$ **dan tentukan apakah nilainya maksimum, minimum atau titik pelana.**
2. **Tentukan nilai maksimum global dan nilai minimum global dari f pada S dan tunjukkan di mana mereka terjadi.**
   $f(x,y)=x^2+y^2, S=\{(x,y):-1\le x\le 3, -1\le y\le 4\}$
3. **Berapa luas daerah terbesar yang dimiliki persegipanjang jika panjang diagonalnya 10.**