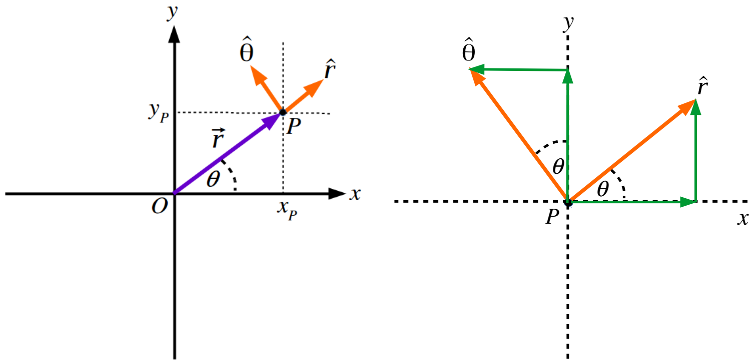
Dosen: Agus Suroso
agussuroso@fi.itb.ac.id

1 Sistem Koordinat Polar

Pada kuliah sebelumnya, kita selalu menggunakan sistem koordinat Kartesius untuk menggambarkan lintasan partikel yang bergerak. Koordinat Kartesius mudah digunakan saat menggambarkan gerak linear partikel, namun sedikit merepotkan saat digunakan untuk meninjau gerak melingkar[1]. Posisi suatu titik (misal P) dalam koordinat polar dinyatakan oleh notasi (r, θ), dengan r menyatakan jarak partikel dari suatu titik acuan (titik asal/*origin*, misal disebut O) dan θ menyatakan sudut antara suatu *sumbu acuan* yang melalui O dan garis yang menghubungkan O dengan P. Vektor satuan untuk koordinat polar kita simbolkan dengan $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$. Gambaran untuk $r, \theta, \hat{r}$, dan $\hat{\theta}$ diberikan oleh gambar berikut (gambar kiri).



Gambar 1: *Kiri*: besaran-besaran dalam koordinat polar. *Kanan*: uraian vektor-vektor satuan koordinat polar ke komponen-komponennya (warna hijau).

Vektor posisi titik P dinyatakan dengan simbol $\vec{r}$ dan digambarkan dengan panah warna biru. Panjang vektor tersebut adalah r. Sudut θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor r terhadap sumbu-x positif. Hal yang menarik dari koordinat polar adalah arah vektor-vektor satuan $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ selalu berubah mengikuti posisi titik P. Arah vektor $\hat{r}$ sama dengan vektor $\vec{r}$, sedangkan arah $\hat{\theta}$ tegaklurus $\hat{r}$ dan searah dengan arah 'bukaan'[2] sudut θ. Posisi dari titik P, dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{r}_P = \vec{r} = r\hat{r}. \tag{1}$$

Hubungan antara koordinat polar dan Kartesius dapat diperoleh dengan menerapkan trigonometri untuk sudut θ. Hasilnya,

$$x_P = r\cos\theta \qquad \text{dan} \qquad y_P = r\sin\theta. \tag{2}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ juga dapat diuraikan dalam vektor-vektor satuan koordinat Kartesius $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ sebagai berikut (perhatikan gambar kanan dan ingat $|\hat{r}| = 1$),

$$\hat{r} = \cos\theta\ \hat{i} + \sin\theta\ \hat{j} \qquad \text{dan} \qquad \hat{\theta} = -\sin\theta\ \hat{i} + \cos\theta\ \hat{j}. \tag{3}$$

Latihan: buktikan $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$ dan $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$.

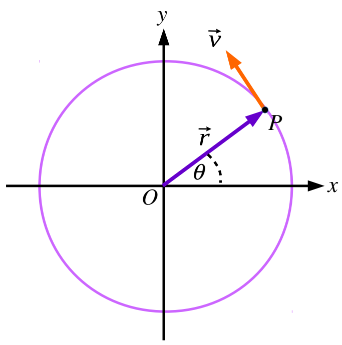
2 Posisi, kecepatan, dan percepatan gerak melingkar

Anggaplah suatu partikel yang mula-mula berada di titik P lalu bergerak melingkar mengikuti lintasan berwarna ungu pada gambar 2. Posisi partikel tersebut akan berubah terhadap waktu. Jika jari-jari lintasan partikel selalu tetap, maka besaran yang berubah dari posisi partikel adalah tersebut adalah θ, sedangkan r nilainya tetap. Karena vektor-vektor satuan bergantung pada θ (lihat persamaan 3), maka selama partikel bergerak arah vektor-vektor satuan $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ selalu berubah, atau merupakan fungsi dari waktu t.

[1]Walaupun tentu saja, kejadian fisis yang terjadi tidak bergantung sistem koordinat. Benda yang yang bergerak melingkar tetap akan bergerak melingkar, baik dilihat melalui sistem koordinat polar maupun Kartesius

[2]ini bukan istilah standar

Dosen: Agus Suroso
agussuroso@fi.itb.ac.id



Gambar 2: Partikel bergerak melingkar mengikuti lintasan berbentuk lingkaran.

Sesuai persamaan (1), **posisi** partikel adalah

$$\vec{r}(t) = r\hat{r}(t). \tag{4}$$

Kecepatan partikel adalah turunan pertama dari posisi terhadap waktu, sehingga diperoleh

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0}\hat{r}(t) + r\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = r\underbrace{\frac{d\hat{r}(t)}{d\theta}}_{\hat{\theta}}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = r\omega\hat{\theta}, \tag{5}$$

dengan $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$ disebut **kecepatan sudut**. Karena arah $\hat{\theta}$ tegaklurus $\hat{r}$, dan $\hat{r}$ searah dengan jari-jari lingkaran, maka arah $\hat{\theta}$ sejajar dengan garis singgung lingkaran ungu. Dengan demikian, kecepatan $\vec{v}$ merupakan kecepatan tangensial partikel. Jika nilai kecepatan sudut ω konstan, maka nilai dari laju tangensial juga konstan.

Untuk menentukan **percepatan**, kita turukan kembali kecepatan $\vec{v}(t)$ terhadap t, diperoleh

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\alpha}\hat{\theta} + r\omega\underbrace{\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}}_{-\hat{r}}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = r\alpha\hat{\theta} - r\omega^2\hat{r}, \tag{6}$$

dengan $\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt}$ disebut **percepatan sudut**. Suku pertama dari percepatan tersebut (yaitu $r\alpha$) disebut sebagai **percepatan tangensial**, karena arahnya searah dengan $\hat{\theta}$, dan nilainya bergantung pada percepatan sudut. Jika partikel bergerak dengan kecepatan sudut konstan, maka diperoleh $\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$ (ingat persamaan 5). Percepatan ini disebut sebagai **percepatan sentripetal**, yang arahnya menuju pusat lintasan partikel. Nilai percepatan sentripetal bergantung hanya pada ω (dan tentu saja r), sehingga partikel yang bergerak melingkar selalu memiliki percepatan jenis ini. Sehingga, kita dapat katakan percepatan sentripetal sebagai percepatan yang menyebabkan suatu benda bergerak melingkar.

Jika suatu partikel memiliki kedua komponen percepatan (tangensial dan sentripetal), maka **besar** percepatan partikel tersebut adalah

$$a = \sqrt{a^2_{\text{tangensial}} + a^2_{\text{sentripetal}}} \tag{7}$$

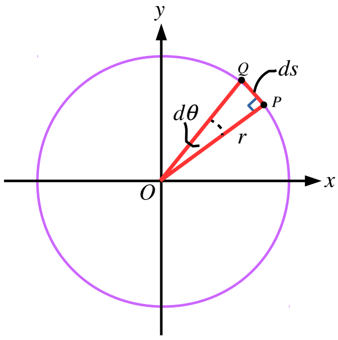
3 Kinematika gerak melingkar

Secara umum, persamaan kinematika untuk gerak melingkar memiliki bentuk yang serupa dengan pada gerak linear. Kita dapat menuliskan,

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \tag{8}$$

$$\omega_t^2 = \omega_0^2 + a\alpha\theta. \tag{9}$$

Untuk mendapatkan hubungan antara besaran-besaran sudut dengan linear, perhatikan gambar 3. Misalkan mula-



Gambar 3: Hubungan antara besaran-besaran sudut dengan linear pada gerak melingkar. Mula-mula partikel berada pada titik P dan sesaat kemudian berpindah ke Q. Panjang lintasan yang ditempuh oleh partikel adalah ds dan sudut yang dibentuk oleh vektor posisi kedua titik tersebut adalah $d\theta$.

mula (saat $t = t_0$) partikel berada pada titik P, dan sesaat kemudian ($t = t_0 + dt$) partikel berpindah ke titik Q. Panjang lintasan yang ditempuh oleh partikel adalah ds dan sudut yang dibentuk oleh vektor posisi pada kedua saat tersebut adalah $d\theta$. Untuk selang waktu dt yang sangat singkat OPQ dapat dianggap sebagai segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku di titik P. Dari hubungan trigonometri, diperoleh $\tan(d\theta) = ds/r$. Karena sudut $d\theta$ sangat kecil, berlaku $\tan(d\theta) \approx d\theta$, sehingga diperoleh $d\theta = ds/r$, atau

$$ds = r d\theta. \tag{10}$$

Kecepatan dan percepatan diperoleh dengan menurunkan jarak tersebut terhadap waktu,

$$v \equiv \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{11}$$

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha. \tag{12}$$

Sekali lagi, kita peroleh hasil yang sama dengan pada persamaan (5) dan (6). Namun, perlu diingat bahwa ds adalah perpindahan partikel pada arah tangensial (menyinggung lingkaran), sehingga turunan-turunannya juga merupakan besaran tangensial (kecepatan tangensial dan percepatan tangensial). Terlihat bahwa nilai percepatan tangensial bergantung pada $\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt}$. Sehingga untuk gerak melingkar dengan kecepatan sudut ω konstan, percepatan tangensial bernilai nol di seluruh bagian lintasan (baik di titik P, Q, maupun lainnya). Untuk gerak dengan kecepatan sudut konstan, besar dari laju tangensial juga konstan, namun arahnya selalu berubah (yaitu selalu menyinggung lingkaran). Pada besaran vektor, perubahan vektor dapat terjadi karena berubahnya besar, arah, maupun keduanya. Karena kecepatan tangensial selalu mengalami perubahan arah, maka dikatakan bahwa kecepatan tangensial selalu mengalami perubahan. Sebelumnya, telah kita ketahui bahwa perubahan kecepatan tiap satuan waktu disebut sebagai percepatan. Sehingga, kita simpulkan bahwa benda yang bergerak melingkar dengan kecepatan sudut konstan juga mengalami percepatan, dan percepatan tersebut haruslah selain percepatan tangensial. Mari kita namai percepatan tersebut (yang mengubah **arah** kecepatan tangensial benda yang bergerak melingkar) sebagai percepatan **sentripetal**.

Untuk mendapatkan percepatan sentripetal, kita perlu meninjau perubahan kecepatan tangensial saat di titik Q bila dibandingkan dengan saat di titik P. Untuk keperluan ini, mula-mula kita tinjau gerak melingkar dengan laju konstan dan menggambarkan vektor kecepatan di kedua titik seperti pada gambar 4 (gambar kiri). Selisih kedua vektor kecepatan dituliskan sebagai $\Delta\vec{v} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P$ (gambar kanan). Terlihat bahwa segitiga yang dibentuk oleh vektor-vektor posisi (yaitu $\vec{r}_P$, $\vec{r}_Q$, dan $\Delta\vec{r}$) dan vektor-vektor kecepatan ($\vec{v}_P$, $\vec{v}_Q$, dan $\Delta\vec{v}$) kongruen. Perbandingan sisi-sisi kedua segitiga memberikan

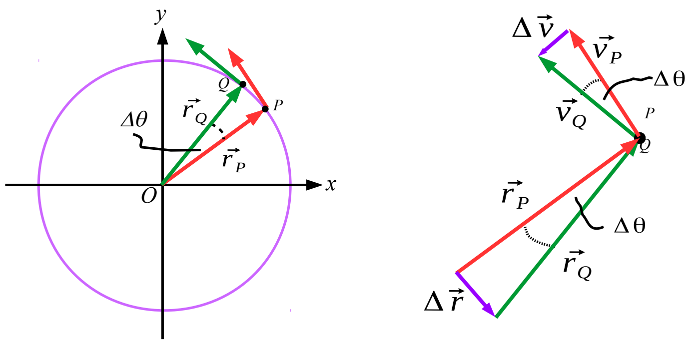
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad \text{atau} \quad \Delta v = \frac{v}{r}\Delta r. \tag{13}$$

Dosen: Agus Suroso
agussuroso@fi.itb.ac.id

Sehingga kita dapat menentukan percepatan,

$$a \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \underbrace{\frac{\Delta r}{\Delta t}}_{v} = \frac{v^2}{r}. \quad (14)$$

Arah dari percepatan sentripetal ditentukan oleh arah vektor $\Delta\vec{v}$. Dari gambar, terlihat bahwa arah $\Delta\vec{v}$ adalah menuju pusat putaran. Telah kita dapatkan besar dan arah percepatan sentripetal seperti pada bagian sebelumnya.

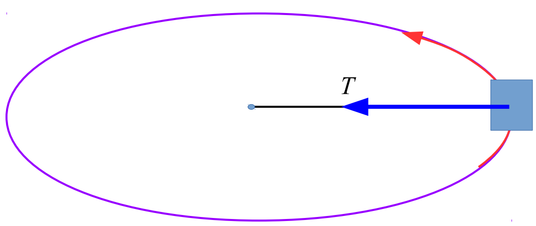


Gambar 4: *Kiri*: gambaran vektor-vektor posisi dan kecepatan benda saat berada pada titik P dan Q. *Kanan*: jika titik P dan Q dibuat berhimpit, maka segitiga yang dibentuk oleh vektor-vektor posisi dan perubahannya ($\vec{r}_P$, $\vec{r}_Q$, $\Delta\vec{r}$) serta vektor-vektor kecepatan dan perubahannya ($\vec{v}_P$, $\vec{v}_Q$, $\Delta\vec{v}$) adalah dua segitiga yang kongruen. Perhatikan pula bahwa arah $\Delta\vec{v}$ berkebalikan dengan $\vec{r}_P$.

4 Gaya Sentripetal

Secara sederhana, *gaya sentripetal* adalah gaya-gaya yang menghasilkan percepatan sentripetal. Dengan demikian, gaya sentripetal adalah jumlah semua komponen gaya yang bekerja pada benda dan arahnya menuju pusat putaran. Contoh yang cukup sederhana, ketika sebuah benda diikat oleh tali kemudian diputar hingga membentuk lintasan lingkaran pada bidang horizontal, tegangan tali (yang arahnya menuju pusat putaran) berperan sebagai gaya sentripetal. Sehingga pada arah radial berlaku

$$\sum F = ma_{\text{sentripetal}} \Leftrightarrow T = mv^2/r. \quad (15)$$



Gambar 5: Benda diikat tali dan berputar dalam lintasan lingkaran yang berada pada bidang horizontal. Anak panah merah menunjukkan arah putaran benda.

Contoh berikutnya, jika lingkaran yang dilintasi benda terikat tali tersebut berada pada bidang vertikal. Ketika benda berada di posisi tertingginya, maka benda mengalami gaya tegangan tali (kita sebut T) dan gaya berat

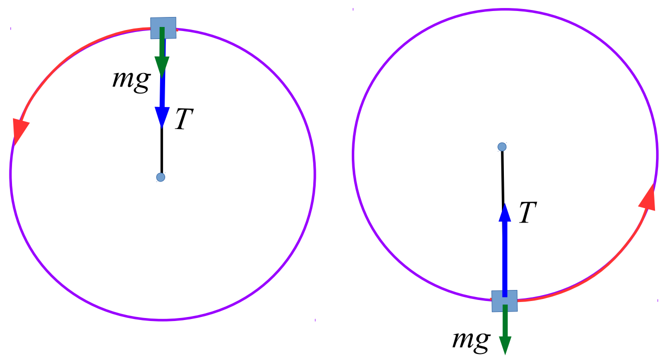
Dosen: Agus Suroso
agussuroso@fi.itb.ac.id

(mg) ke bawah (menuju pusat putaran), maka saat itu gaya sentripetal yang bekerja pada benda adalah jumlahan kedua gaya tersebut. Sehingga pada arah radial berlaku,

$$\sum F = ma_{\text{sentripetal}} \Leftrightarrow T + mg = mv^2/r \tag{16}$$

Kemudian ketika benda berada di titik terendahnya, arah tegangan tali adalah ke atas (menuju pusat putaran) dan gaya berat ke bawah (menjauhi titik pusat putaran), sehingga gaya sentripetal yang dialami benda adalah $T - mg$,

$$\sum F = ma_{\text{sentripetal}} \Leftrightarrow T - mg = mv^2/r \tag{17}$$



Gambar 6: Benda diikat tali dan berputar dalam lintasan lingkaran yang berada pada bidang vertikal. Gambar kiri menunjukkan diagram benda bebas saat benda berada di titik tertinggi lintasan, sedangkan kanan saat benda berada pada titik terendahnya. Anak panah merah menunjukkan arah putaran benda.