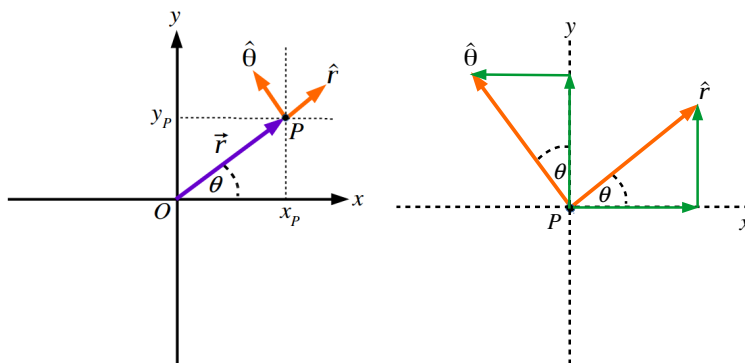


## 1 Sistem Koordinat Polar

Pada kuliah sebelumnya, kita selalu menggunakan sistem koordinat Kartesius untuk menggambarkan lintasan partikel yang bergerak. Koordinat Kartesius mudah digunakan saat menggambarkan gerak linear partikel, namun sedikit merepotkan saat digunakan untuk meninjau gerak melingkar<sup>1</sup>. Posisi suatu titik (misal  $P$ ) dalam koordinat polar dinyatakan oleh notasi  $(r, \theta)$ , dengan  $r$  menyatakan jarak partikel dari suatu titik acuan (titik asal/*origin*, misal disebut  $O$ ) dan  $\theta$  menyatakan sudut antara suatu *sumbu acuan* yang melalui  $O$  dan garis yang menghubungkan  $O$  dengan  $P$ . Vektor satuan untuk koordinat polar kita simbolkan dengan  $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$ . Gambaran untuk  $r, \theta, \hat{r}$ , dan  $\hat{\theta}$  diberikan oleh gambar berikut (gambar kiri).



**Gambar 1:** *Kiri:* besaran-besaran dalam koordinat polar. *Kanan:* uraian vektor-vektor satuan koordinat polar ke komponen-komponennya (warna hijau).

Vektor posisi titik  $P$  dinyatakan dengan simbol  $\vec{r}$  dan digambarkan dengan panah warna biru. Panjang vektor tersebut adalah  $r$ . Sudut  $\theta$  adalah sudut yang dibentuk oleh vektor  $r$  terhadap sumbu- $x$  positif. Hal yang menarik dari koordinat polar adalah arah vektor-vektor satuan  $\hat{r}$  dan  $\hat{\theta}$  selalu berubah mengikuti posisi titik  $P$ . Arah vektor  $\hat{r}$  sama dengan vektor  $\vec{r}$ , sedangkan arah  $\hat{\theta}$  tegaklurus  $\hat{r}$  dan searah dengan arah 'bukaan'<sup>2</sup> sudut  $\theta$ . Posisi dari titik  $P$ , dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{r}_P = \vec{r} = r\hat{r}. \quad (1)$$

Hubungan antara koordinat polar dan Kartesius dapat diperoleh dengan menerapkan trigonometri untuk sudut  $\theta$ . Hasilnya,

$$x_P = r \cos \theta \quad \text{dan} \quad y_P = r \sin \theta. \quad (2)$$

Vektor-vektor satuan  $\hat{r}$  dan  $\hat{\theta}$  juga dapat diuraikan dalam vektor-vektor satuan koordinat Kartesius  $\hat{i}$  dan  $\hat{j}$  sebagai berikut (perhatikan gambar kanan dan ingat  $|\hat{r}| = 1$ ),

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad \text{dan} \quad \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (3)$$

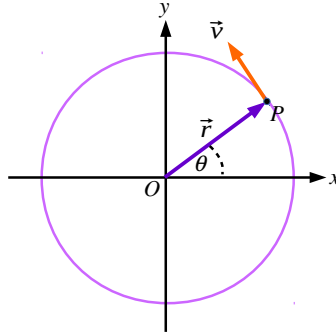
**Latihan:** buktikan  $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$  dan  $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$ .

## 2 Posisi, kecepatan, dan percepatan gerak melingkar

Anggaplah suatu partikel yang mula-mula berada di titik  $P$  lalu bergerak melingkar mengikuti lintasan berwarna ungu pada gambar 2. Posisi partikel tersebut akan berubah terhadap waktu. Jika jari-jari lintasan partikel selalu tetap, maka besaran yang berubah dari posisi partikel adalah tersebut adalah  $\theta$ , sedangkan  $r$  nilainya tetap. Karena vektor-vektor satuan bergantung pada  $\theta$  (lihat persamaan 3), maka selama partikel bergerak arah vektor-vektor satuan  $\hat{r}$  dan  $\hat{\theta}$  selalu berubah, atau merupakan fungsi dari waktu  $t$ .

<sup>1</sup>Walaupun tentu saja, kejadian fisis yang terjadi tidak bergantung sistem koordinat. Benda yang bergerak melingkar tetap akan bergerak melingkar, baik dilihat melalui sistem koordinat polar maupun Kartesius

<sup>2</sup>ini bukan istilah standar



**Gambar 2:** Partikel bergerak melingkar mengikuti lintasan berbentuk lingkaran.

Sesuai persamaan (1), **posisi** partikel adalah

$$\vec{r}(t) = r\hat{r}(t). \quad (4)$$

**Kecepatan** partikel adalah turunan pertama dari posisi terhadap waktu, sehingga diperoleh

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_0 \hat{r}(t) + r \frac{d\hat{r}(t)}{dt} = r \underbrace{\frac{d\hat{r}(t)}{d\theta}}_{\hat{\theta}} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = r\omega\hat{\theta}, \quad (5)$$

dengan  $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$  disebut **kecepatan sudut**. Karena arah  $\hat{\theta}$  tegak lurus  $\hat{r}$ , dan  $\hat{r}$  searah dengan jari-jari lingkaran, maka arah  $\hat{\theta}$  sejajar dengan garis singgung lingkaran ungu. Dengan demikian, kecepatan  $\vec{v}$  merupakan kecepatan tangensial partikel. Jika nilai kecepatan sudut  $\omega$  konstan, maka nilai dari laju tangensial juga konstan.

Untuk menentukan **percepatan**, kita turunkan kembali kecepatan  $\vec{v}(t)$  terhadap  $t$ , diperoleh

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\alpha} \hat{\theta} + r\omega \underbrace{\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}}_{-\hat{r}} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = r\alpha\hat{\theta} - r\omega^2\hat{r}, \quad (6)$$

dengan  $\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt}$  disebut **percepatan sudut**. Suku pertama dari percepatan tersebut (yaitu  $r\alpha$ ) disebut sebagai **percepatan tangensial**, karena arahnya searah dengan  $\hat{\theta}$ , dan nilainya bergantung pada percepatan sudut. Jika partikel bergerak dengan kecepatan sudut konstan, maka diperoleh  $\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$  (ingat persamaan 5). Percepatan ini disebut sebagai **percepatan sentripetal**, yang arahnya menuju pusat lintasan partikel. Nilai percepatan sentripetal bergantung hanya pada  $\omega$  (dan tentu saja  $r$ ), sehingga partikel yang bergerak melingkar selalu memiliki percepatan jenis ini. Sehingga, kita dapat katakan percepatan sentripetal sebagai percepatan yang menyebabkan suatu benda bergerak melingkar.

Jika suatu partikel memiliki kedua komponen percepatan (tangensial dan sentripetal), maka **besar** percepatan partikel tersebut adalah

$$a = \sqrt{a_{\text{tangensial}}^2 + a_{\text{sentripetal}}^2} \quad (7)$$

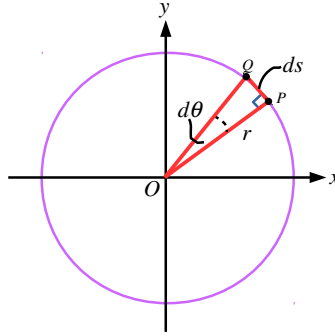
### 3 Kinematika gerak melingkar

Secara umum, persamaan kinematika untuk gerak melingkar memiliki bentuk yang serupa dengan pada gerak linear. Kita dapat menuliskan,

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad (8)$$

$$\omega_t^2 = \omega_0^2 + a\alpha\theta. \quad (9)$$

Untuk mendapatkan hubungan antara besaran-besaran sudut dengan linear, perhatikan gambar 3. Misalkan mula-



**Gambar 3:** Hubungan antara besaran-besaran sudut dengan linear pada gerak melingkar. Mula-mula partikel berada pada titik  $P$  dan sesaat kemudian berpindah ke  $Q$ . Panjang lintasan yang ditempuh oleh partikel adalah  $ds$  dan sudut yang dibentuk oleh vektor posisi kedua titik tersebut adalah  $d\theta$ .

mula (saat  $t = t_0$ ) partikel berada pada titik  $P$ , dan sesaat kemudian ( $t = t_0 + dt$ ) partikel berpindah ke titik  $Q$ . Panjang lintasan yang ditempuh oleh partikel adalah  $ds$  dan sudut yang dibentuk oleh vektor posisi pada kedua saat tersebut adalah  $d\theta$ . Untuk selang waktu  $dt$  yang sangat singkat  $OPQ$  dapat dianggap sebagai segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku di titik  $P$ . Dari hubungan trigonometri, diperoleh  $\tan(d\theta) = ds/r$ . Karena sudut  $d\theta$  sangat kecil, berlaku  $\tan(d\theta) \approx d\theta$ , sehingga diperoleh  $d\theta = ds/r$ , atau

$$ds = r d\theta. \quad (10)$$

Kecepatan dan percepatan diperoleh dengan menurunkan jarak tersebut terhadap waktu,

$$v \equiv \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad (11)$$

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha. \quad (12)$$

Sekali lagi, kita peroleh hasil yang sama dengan pada persamaan (5) dan (6). Namun, perlu diingat bahwa  $ds$  adalah perpindahan partikel pada arah tangensial (menyinggung lingkaran), sehingga turunan-turunannya juga merupakan besaran tangensial (kecepatan tangensial dan percepatan tangensial). Terlihat bahwa nilai percepatan tangensial bergantung pada  $\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt}$ . Sehingga untuk gerak melingkar dengan kecepatan sudut  $\omega$  konstan, percepatan tangensial bernilai nol di seluruh bagian lintasan (baik di titik  $P$ ,  $Q$ , maupun lainnya). Untuk gerak dengan kecepatan sudut konstan, besar dari laju tangensial juga konstan, namun arahnya selalu berubah (yaitu selalu menyinggung lingkaran). Pada besaran vektor, perubahan vektor dapat terjadi karena berubahnya besar, arah, maupun keduanya. Karena kecepatan tangensial selalu mengalami perubahan arah, maka dikatakan bahwa kecepatan tangensial selalu mengalami perubahan. Sebelumnya, telah kita ketahui bahwa perubahan kecepatan tiap satuan waktu disebut sebagai percepatan. Sehingga, kita simpulkan bahwa benda yang bergerak melingkar dengan kecepatan sudut konstan juga mengalami percepatan, dan percepatan tersebut haruslah selain percepatan tangensial. Mari kita namai percepatan tersebut (yang mengubah **arah** kecepatan tangensial benda yang bergerak melingkar) sebagai percepatan **sentripetal**.

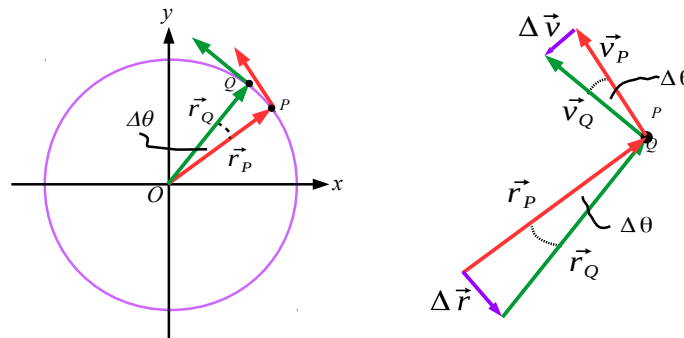
Untuk mendapatkan percepatan sentripetal, kita perlu meninjau perubahan kecepatan tangensial saat di titik  $Q$  bila dibandingkan dengan saat di titik  $P$ . Untuk keperluan ini, mula-mula kita tinjau gerak melingkar dengan laju konstan dan menggambarkan vektor kecepatan di kedua titik seperti pada gambar 4 (gambar kiri). Selisih kedua vektor kecepatan dituliskan sebagai  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P$  (gambar kanan). Terlihat bahwa segitiga yang dibentuk oleh vektor-vektor posisi (yaitu  $\vec{r}_P$ ,  $\vec{r}_Q$ , dan  $\Delta\vec{r}$ ) dan vektor-vektor kecepatan ( $\vec{v}_P$ ,  $\vec{v}_Q$ , dan  $\Delta\vec{v}$ ) kongruen. Perbandingan sisi-sisi kedua segitiga memberikan

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad \text{atau} \quad \Delta v = \frac{v}{r} \Delta r. \quad (13)$$

Sehingga kita dapat menentukan percepatan,

$$a \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \underbrace{\frac{\Delta r}{\Delta t}}_v = \frac{v^2}{r}. \quad (14)$$

Arah dari percepatan sentripetal ditentukan oleh arah vektor  $\Delta\vec{v}$ . Dari gambar, terlihat bahwa arah  $\Delta\vec{v}$  adalah menuju pusat putaran. Telah kita dapatkan besar dan arah percepatan sentripetal seperti pada bagian sebelumnya.

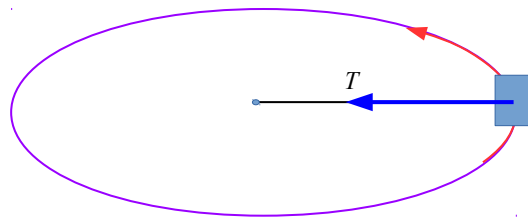


**Gambar 4:** *Kiri:* gambaran vektor-vektor posisi dan kecepatan benda saat berada pada titik P dan Q. *Kanan:* jika titik P dan Q dibuat berhimpit, maka segitiga yang dibentuk oleh vektor-vektor posisi dan perubahannya ( $\vec{r}_P$ ,  $\vec{r}_Q$ ,  $\Delta\vec{r}$ ) serta vektor-vektor kecepatan dan perubahannya ( $\vec{v}_P$ ,  $\vec{v}_Q$ ,  $\Delta\vec{v}$ ) adalah dua segitiga yang kongruen. Perhatikan pula bahwa arah  $\Delta\vec{v}$  berkebalikan dengan  $\vec{r}_P$ .

## 4 Gaya Sentripetal

Secara sederhana, *gaya sentripetal* adalah gaya-gaya yang menghasilkan percepatan sentripetal. Karena arah percepatan sentripetal adalah radial, maka gaya sentripetal adalah jumlah semua komponen gaya yang bekerja pada pada arah radial. Contoh yang cukup sederhana, ketika sebuah benda diikat oleh tali kemudian diputar hingga membentuk lintasan lingkaran pada bidang horizontal, tegangan tali (yang arahnya menuju pusat putaran) berperan sebagai gaya sentripetal. Sehingga pada arah radial berlaku

$$\sum F = ma_{\text{sentripetal}} \Leftrightarrow T = mv^2/r. \quad (15)$$



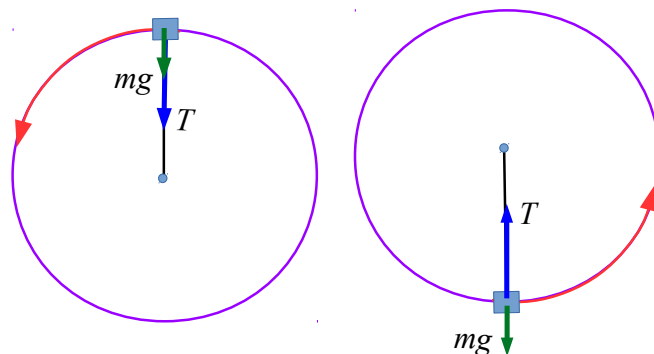
**Gambar 5:** Benda diikat tali dan berputar dalam lintasan lingkaran yang berada pada bidang horizontal. Anak panah merah menunjukkan arah putaran benda.

Contoh berikutnya, jika lingkaran yang dilintasi benda terikat tali tersebut berada pada bidang vertikal. Ketika benda berada di posisi tertingginya, maka benda mengalami gaya tegangan tali (kita sebut  $T$ ) dan gaya berat ( $mg$ ) ke bawah (menuju pusat putaran), maka saat itu gaya sentripetal yang bekerja pada benda adalah jumlahan kedua gaya tersebut. Sehingga pada arah radial berlaku,

$$\sum F = ma_{\text{sentripetal}} \Leftrightarrow T + mg = mv^2/r \quad (16)$$

Kemudian ketika benda berada di titik terendahnya, arah tegangan tali adalah ke atas (menuju pusat putaran) dan gaya berat ke bawah (menjauhi titik pusat putaran), sehingga gaya sentripetal yang dialami benda adalah  $T - mg$ ,

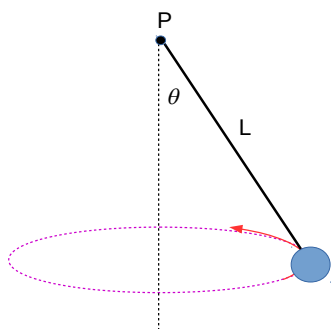
$$\sum F = ma_{\text{sentripetal}} \Leftrightarrow T - mg = mv^2/r \quad (17)$$



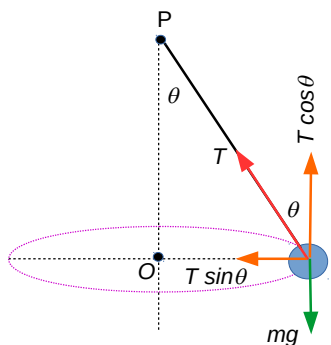
**Gambar 6:** Benda diikat tali dan berputar dalam lintasan lingkaran yang berada pada bidang vertikal. Gambar kiri menunjukkan diagram benda bebas saat benda berada di titik tertinggi lintasan, sedangkan kanan saat benda berada pada titik terendahnya. Anak panah merah menunjukkan arah putaran benda.

Contoh soal:

1. Suatu benda bermassa  $m$  tergantung pada sebuah tali ringan sepanjang  $L$ . Ujung tali ditambatkan ke titik P dan benda diputar sehingga membentuk ayunan kerucut seperti pada gambar. Tentukan hubungan antara sudut  $\theta$  dengan laju sudut ( $\omega$ ) terhadap sumbu vertikal yang melalui P.



**Jawab:** Benda mengalami gerak melingkar dengan pusat putaran ada di titik O, yaitu titik pada bidang lingkaran yang tepat berada di bawah titik P. Jari-jari lintasan benda adalah  $r = L \sin \theta$ . Selain itu, pada arah vertikal benda berada pada kondisi setimbang. Diagram benda bebas untuk benda adalah sebagai berikut



Tegangan tali yang mengarah radial berperan sebagai gaya sentripetal, sehingga

$$T \sin \theta = m\omega^2 r \Leftrightarrow T = m\omega^2 L. \tag{18}$$

Sedangkan pada arah vertikal benda mengalami kesetimbangan,

$$T \cos \theta = mg. \tag{19}$$

Dari kedua persamaan tersebut diperoleh

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 L}. \quad (20)$$

Terlihat bahwa jika  $\omega$  membesar maka sudut  $\theta$  juga membesar.

2. Pada gambar berikut, benda  $m_1$  dan  $m_2$  dihubungkan menggunakan tali 1, kemudian benda  $m_2$  dihubungkan ke suatu titik yang berperan sebagai pusat putaran menggunakan tali 2. Anggap kedua tali identik (kekuatan dan panjangnya sama). Sistem kemudian diputar pada bidang vertikal dengan posisi kedua benda dan pusat putaran dijaga selalu segaris. Pada titik tertinggi, diketahui  $m_2$  bergerak dengan kecepatan  $v$ . (a) Tentukan tegangan tiap tali. (b) Jika putaran dibuat semakin cepat, tali manakah yang akan putus lebih dulu? [Serway, 2010]

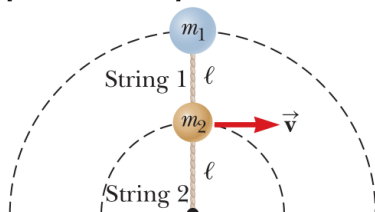


Figure P6.44

**Jawab:** Gaya sentripetal yang bekerja pada tiap benda saat berada di posisi tertinggi adalah

$$T_1 + m_1 g = m_1 v_1^2 / (2l) \quad (21)$$

$$T_2 + m_2 g - T_1 = m_2 v_2^2 / (l). \quad (22)$$

Karena posisi kedua benda dan pusat putaran selalu segaris, maka laju sudut kedua benda bernilai sama,

$$\omega = \frac{v_1}{2l} = \frac{v_2}{l}. \quad (23)$$

Karena  $v_2 = v$ , maka  $v_1 = 2v$ . Substitusikan nilai kecepatan masing-masing benda ke persamaan 21 dan 22 menghasilkan

$$T_1 + m_1 g = 2m_1 v^2 / (l) \quad (24)$$

$$T_2 + m_2 g - T_1 = m_2 v^2 / (l). \quad (25)$$

Dari kedua persamaan diperoleh

$$T_1 = 2m_1 v^2 / l - m_1 g \quad (26)$$

$$T_2 = (2m_1 + m_2) v^2 / l - (m_1 + m_2) g. \quad (27)$$

atau

$$T_2 - T_1 = m_2 (v^2 / l - g). \quad (28)$$

Jika  $v$  cukup besar, maka  $T_2 - T_1 > 0$  atau  $T_2 > T_1$ . Sehingga tali kedua akan putus terlebih dahulu.