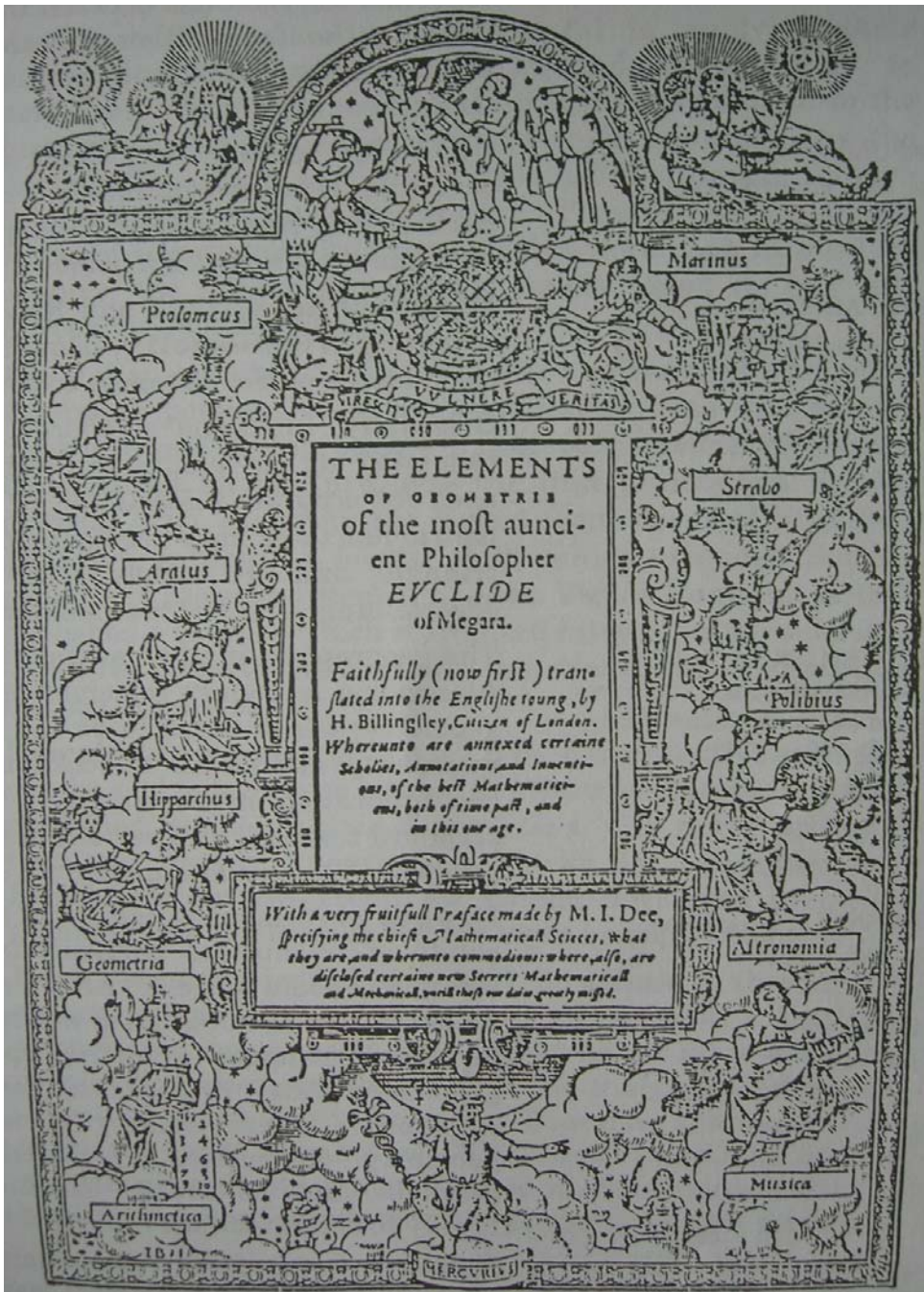


1. Prolog: Menelusuri Sejarah

Matematika, menurut catatan sejarah, telah lahir sejak jaman Mesir Kuno, kira-kira lima ribu tahun yang lalu. Sekitar empat ribu tahun yang lampau, bangsa Babilonia telah menggunakan geometri sebagai basis perhitungan astronomis, sementara bangsa Mesir telah mengenal 'tripel Pythagoras' dan menggunakannya untuk membuat sudut siku. Tiga ribuan tahun yang lalu sifat-sifat segitiga siku-siku juga telah dikenal oleh bangsa Cina.

Namun, bangsa Yunani Kuno-lah yang telah mengembangkan matematika secara sistematis sebagai ilmu sejak dua ribu lima ratusan tahun yang lalu. Dalil pertama tentang segitiga siku-siku dalam lingkaran dibuktikan oleh Thales (625-547 SM), dan dalil tentang ketiga sisi segitiga siku-siku yang dipelajari di sekolah hingga sekarang ini dibuktikan oleh Pythagoras (580-496 SM). Matematikawan Yunani Kuno lainnya yang terkenal melalui karyanya adalah Eudoxus (405-355 SM), Euclid (330-275 SM), Archimedes (287-212 SM), dan Hipparcus (147-127+ SM). Euclid, khususnya, menulis lima belas jilid buku geometri berjudul *Elements*, yang menjadi standar buku matematika hingga sekarang. Sementara itu Archimedes menulis buku *The Method* dan terkenal dengan teriakannya *Eureka!* [lihat A.D. Aczel, 1996].



Halaman judul buku Euclid *Elements*, terjemahan bahasa Inggris pada 1570

[difoto dari J. Gullberg, 1997]

Menurut *The Timetables of History* [B. Grun, 1963], buku pertama tentang aljabar ditulis oleh Diophantus dari Alexandria pada tahun 250-an. Sekitar tahun 595, bilangan desimal telah dikenal di India. Pada tahun 630-an, matematikawan India Brahmagupta (598-665+) telah mengenal konsep bilangan negatif dan nol serta mengembangkan metode untuk menyelesaikan persamaan kuadrat. Pada tahun 750, matematika dikembangkan di Spanyol Arab dan karya Euclid *Elements* diterjemahkan ke bahasa Arab. Pada tahun 820-an, matematikawan Persia Muhammad Ibnu Musa al Khowarizmi (780-850) menulis buku *Al Jabr Wa'l Muqabalah* yang memperkenalkan istilah 'aljabar'. Notasi aritmetika yang kita kenal sekarang ini dibawa ke Eropa oleh bangsa Arab pada tahun 975.

Selama abad pertengahan, tidak banyak perkembangan dalam matematika, kecuali pengenalan lambang bilangan Arab di Eropa oleh Fibonacci (1170-1250) dalam *Liber Abaci* pada 1202. Namun demikian, sejumlah universitas didirikan di Eropa pada masa itu. Matematika mulai dipelajari kembali secara intensif pada jaman *Renaissance* di Eropa, sekitar abad ke-17. Beberapa matematikawan masa itu yang terkenal melalui karyanya adalah René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1643-1727), Gottfried von Leibniz (1646-1716), Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Daniel Bernoulli (1700-1782),

Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), dan Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

Dalam kata pengantarnya untuk buku *Mathematics: From the Birth of Numbers* [J. Gullberg, 1997], P. Hilton menyatakan bahwa matematika lahir dan berkembang karena adanya keinginan manusia untuk “mensistematisasikan pengalamannya, menatanya dan membuatnya mudah dimengerti, supaya dapat meramalkan dan — bila memungkinkan — mengendalikan peristiwa yang akan terjadi pada masa depan.” Bila naluri *engineers* adalah merekayasa alam dan naluri *scientists* adalah memahami alam dan mencari tahu apa yang sesungguhnya terjadi, maka naluri matematikawan adalah menstrukturkan proses pemahaman tersebut dengan mencari kesamaan pola di antara berbagai fenomena [I. Stewart, 1995].

Hingga sekarang, cabang-cabang utama matematika, di antaranya logika, kombinatorika, aljabar, teori bilangan, geometri, analisis, teori peluang, statistika, analisis numerik, matematika komputasi, teori kontrol, optimisasi, fisika matematik, dan biologi matematika, telah berkembang jauh dan banyak diaplikasikan dalam bidang lainnya, terutama dalam bidang-bidang yang memerlukan analisis kuantitatif seperti sains, *engineering*, ekonomi, dan kedokteran.

Aplikasi matematika di dunia industri dapat dijumpai dalam sektor *manufacturing*, desain produk, pengelolaan lingkungan, dan sains informasi (khususnya *bio-informatics*) [*Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1996].

Dibandingkan dengan keadaan di negara lain, pengembangan dan pemanfaatan matematika di Indonesia jauh tertinggal. Matematika mulai ditekuni oleh bangsa Indonesia pada abad 20. Doktor matematika pertama dari Indonesia adalah Dr. G.S.S.J. Ratu Langie (alm.), atau lebih dikenal sebagai Dr. Sam Ratulangi, yang meraih gelar doktornya pada 1919 dari University of Zürich, dengan disertasinya yang berjudul *Kurven-Systeme in vollständigen Figuren*. Hampir 40 tahun kemudian, **Profesor Handali** mendapat gelar doktornya dari FIPIA-ITB pada 1957, dengan disertasinya yang berjudul *On the Zeros of Polynomials of the Form $\beta f(z) - zf'(z)$* . Pada 1959, Profesor Moedomo (alm.) meraih gelar doktornya dari University of Illinois, dengan disertasinya yang berjudul *A Representation Theory for the Laplace Transform of Vector-Valued Functions*. Paper pertama karya putra Indonesia, yang terekam di *Mathematical Reviews (American Mathematical Society)*, adalah paper Moedomo dan J.J. Uhl Jr. "Radon-Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals", yang dipublikasikan di *Pacific Journal of Mathematics* pada 1971.

Di antara cabang-cabang utama matematika, analisis termasuk cabang terbesar, yang meliputi analisis real (termasuk teori ukuran dan integral), analisis kompleks, analisis Fourier, analisis fungsional, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan integral, sistem dinamik, topologi, teori operator, dan aljabar operator. Untuk menekuni cabang ini, KBK Analisis dibentuk pada 1979. Pada akhir 2005, KBK Analisis dan KBK Geometri bergabung membentuk KK Analisis dan Geometri, yang saat itu beranggotakan 12 dosen, 7 di antaranya bergelar doktor. Pada pertengahan 2006, **Drs. E. Hutahaean, M.Si.** pensiun, sehingga anggotanya sekarang tinggal 11 dosen.

Selain merupakan salah satu KK pendukung utama Program Studi Matematika di ITB, KK Analisis dan Geometri termasuk kelompok yang aktif dalam penelitian dan pengabdian kepada masyarakat. Saya termasuk peneliti aktif dalam area analisis Fourier (modern) dan analisis fungsional. Gelar doktor saya diperoleh dari University of New South Wales, Australia, pada tahun 1992, dengan disertasi berjudul *Maximal Functions and Harmonic Analysis*. Pada bagian berikutnya akan diuraikan kontribusi saya dalam analisis Fourier dan analisis fungsional, keterkaitannya dengan persamaan diferensial parsial dan geometri, dan potensi aplikasinya.

2. Kontribusi dalam Analisis Fourier (dan PDP)

Sebelum saya paparkan hasil-hasil penelitian saya selama ini, ijin-kan saya untuk menyampaikan secara ringkas lahirnya *analisis Fourier* serta kaitannya dengan berbagai cabang matematika dan bidang ilmu lainnya, sambil bernostalgia tentang materi kuliah yang saya dapatkan dari **Profesor M. Ansjar** pada 1980-an.

Analisis Fourier klasik pada mulanya berkembang dalam upaya mempelajari deret dan integral Fourier. Deret trigonometri yang kita kenal sekarang sebagai *deret Fourier* pertama kali diperkenalkan oleh D. Bernoulli pada tahun 1750-an, ketika ia mengkaji persamaan diferensial parsial untuk sebuah dawai bergetar

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ untuk setiap } t$$

dan syarat awal

$$u(x,0) = f(x) \text{ dan } u_t(x,0) = 0.$$

Di sini c adalah konstanta, L menyatakan panjang dawai, $f(x)$ adalah bentuk awal dawai, $u = u(x,t)$ menyatakan simpangan vertikal dawai pada posisi x dan waktu t , dan u_{xx} dan u_{tt} menyatakan turunan parsial kedua u terhadap x dan terhadap t . Persamaan diferensial parsial ini merupakan *persamaan gelombang* dimensi-1.

Bernoulli menemukan bahwa untuk $f(x) = \sin(k\pi x/L)$, fungsi

$$u(x,t) = \sin(k\pi x/L) \cdot \cos(ck\pi t/L)$$

merupakan solusi untuk setiap bilangan bulat positif k . (Di sini $u(x,t)$ mempunyai interpretasi musikal sebagai suara yang dihasilkan oleh dawai. Pada masa itu, matematika dan musik mempunyai hubungan yang mesra, seperti pada era Pythagoras.)

Karena persamaan di atas termasuk persamaan diferensial parsial 'linear', kombinasi linear dari solusi-solusi tadi juga merupakan solusi. Bernoulli menyimpulkan bahwa

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/L) \cos(ck\pi t/L)$$

memenuhi persamaan dengan syarat awal

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/L).$$

Bernoulli juga menyatakan bahwa ia telah mendapat semua solusi tanpa penjelasan tentang koefisien a_k .

Temuan Bernoulli ini langsung disanggah oleh L. Euler. Menurut Euler, bagaimana mungkin sebarang fungsi $f(x)$ yang terdefinisi pada selang $[0,L]$ dengan $f(0) = f(L) = 0$ dapat dinyatakan sebagai deret tak hingga sinus, yakni

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/L).$$

Euler menganggap bahwa hal ini *absurd* karena deret sinus memiliki sifat khusus, yakni ‘ganjil’ dan ‘periodik’ dengan periode $2L$, sesuatu yang tak dimiliki oleh, misalnya, $f(x) = x(L - x)$.

Euler, dan secara independen d’Alembert, pada saat itu telah menemukan solusi dalam bentuk yang berbeda, yakni

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f^*(x + ct) + f^*(x - ct)]$$

dengan f^* menyatakan perluasan dari f pada seluruh garis \mathbf{R} sehingga f^* ganjil dan periodik dengan periode $2L$. Mengingat

$$\sin(k\pi x / L) \cos(ck\pi t / L) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x + ct)\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x - ct)\right) \right),$$

solusi Bernoulli dianggap kasus khusus dari solusi temuannya.

Bernoulli tidak dapat menjawab dengan baik sanggahan Euler. Ia hanya mengulang argumennya bahwa persamaan

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x / L)$$

dapat dipandang sebagai suatu sistem aljabar yang terdiri dari tak hingga persamaan linear dengan tak hingga peubah. Kelemahan utama argumennya adalah bahwa ia tak dapat memberikan rumus untuk koefisien a_k dalam f . Rumus itu akhirnya ditemukan oleh Euler beberapa tahun sesudahnya, namun Euler tidak mempelajari lebih lanjut relevansinya karena ia telah menolak gagasan Bernoulli sebelumnya.

Setengah abad kemudian, tepatnya pada 1807, Fourier berhasil mengembangkan apa yang kita kenal sekarang sebagai deret Fourier. Ketika itu ia tertarik dengan *persamaan panas* atau persamaan difusi

$$u_t(x,t) = c^2 \cdot u_{xx}(x,t)$$

dengan $u(x,t)$ menyatakan suhu kawat yang panjangnya L pada posisi x dan waktu t , dengan syarat batas dan syarat awal

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ dan } u(x,0) = f(x).$$

Dengan menuliskan f sebagai deret $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x / L)$, Fourier

menemukan solusi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(\frac{-c^2 k^2 \pi^2 t}{L^2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Namun, tak seperti Bernoulli, Fourier memberikan rumus untuk koefisien a_k dalam f , yakni

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k\pi x / L) dx$$

[lihat Strichartz, 2000].

Bermula dari penemuan Fourier inilah anak-cabang matematika yang dikenal sebagai analisis Fourier lahir. Tidak hanya itu, banyak gagasan dasar dan hasil dalam matematika yang dikembangkan oleh sejumlah matematikawan ketika mereka mempelajari deret Fourier. Sebagai contoh, konsep fungsi modern diperkenalkan oleh P.G.L. Dirichlet (1805-1859) ketika ia mempelajari kekonvergenan

deret Fourier; demikian pula teori distribusi dikembangkan olehnya dalam rangka mempelajari transformasi Fourier. Konsep integral Riemann dan integral Lebesgue diperkenalkan oleh G.F.B. Riemann (1826-1866) dan H. Lebesgue (1875-1941) juga dalam studi analisis Fourier. Contoh lainnya, bilangan ordinal dan kardinal tak hingga dikembangkan oleh G. Cantor (1845-1918) dalam upayanya memecahkan suatu masalah analisis real yang melibatkan deret trigonometri [lihat G. Weiss, 1965].

Bila pada awalnya analisis Fourier dikembangkan untuk memecahkan masalah fisis tertentu, analisis Fourier kini mempunyai banyak aplikasi, tidak hanya dalam matematika tetapi juga dalam bidang ilmu lainnya, sebutlah misalnya dalam teori bilangan [lihat E.M. Stein & R. Sharkarchi, 2003], teori peluang, dan analisis signal di fisika, teknik elektro, dan kedokteran [lihat G.B. Folland, 1996, dan M.A. Pinsky, 2002].

Sejalan dengan perkembangan anak-cabang matematika dan bidang ilmu lainnya, analisis Fourier kini telah berkembang semakin jauh. Dalam buku-buku teks terkini, deret Fourier untuk fungsi periodik f dengan periode 1 didefinisikan sebagai

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x},$$

dengan rumus koefisien

$$c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi kx} dx.$$

Sementara itu, *transformasi Fourier* dari fungsi f yang terintegralkan Lebesgue pada \mathbf{R} didefinisikan sebagai

$$Ff(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx,$$

dengan rumus inversi

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Ff(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi.$$

Baik deret maupun transformasi Fourier mempunyai interpretasi penting dalam analisis signal. Bila f menyatakan signal pada domain waktu, maka Ff menyatakan signal yang sama pada domain frekuensi. Analisis signal f dalam hal ini dapat dilakukan melalui transformasi Fourier-nya, yaitu Ff .

Pendekatan baru banyak dilakukan dalam studi analisis Fourier, misalnya melalui pemahaman analisis fungsional abstrak. Perkembangan ini tentu saja diikuti oleh penemuan-penemuan baru, yang akhirnya melahirkan analisis Fourier modern. Dalam analisis Fourier modern, berbagai operator integral selain transformasi Fourier, sebutlah transformasi Hilbert, *operator konvolusi*, *operator maksimal*, *operator integral singular*, dan *operator integral fraksional*,

juga menjadi bahan kajian utama. Permasalahan sentral berkenaan dengan operator-operator tersebut adalah: apakah mereka terbatas dari suatu ruang fungsi ke ruang fungsi lainnya? Sebagai contoh, kita tahu bahwa transformasi Fourier merupakan ‘isometri’ (yakni, mengawetkan energi) di *ruang Lebesgue* L^2 , dan secara umum ia terbatas dari L^p ke L^q , yakni memenuhi ketaksamaan

$$\|Ff\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_p,$$

untuk $1 \leq p \leq 2$ dan $1/q = 1 - 1/p$. (Catatan: Ruang Lebesgue $L^p(X)$

beranggotakan fungsi f dengan $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$.)

Beberapa operator yang dipelajari dalam analisis Fourier terkait erat dengan persamaan-persamaan diferensial klasik seperti persamaan gelombang, persamaan panas, dan *persamaan Poisson*. Keterbatasan sebuah operator dalam hal ini setara dengan kekontinuan operator, yang terkait dengan regularitas operator tersebut. Bila operator itu terkait dengan suatu persamaan diferensial, maka keterbatasannya menentukan *well-posedness* persamaan diferensial tersebut. Pengetahuan tentang keterbatasan operator yang terkait dengan suatu persamaan diferensial atau persamaan integral seringkali diperlukan ketika kita harus menghampiri solusi persamaan tersebut secara numerik.

2.1 Operator Maksimal

Kiprah penelitian saya dalam analisis Fourier berawal ketika saya menempuh program doktor di UNSW, Sydney, pada tahun 1988-1991, di bawah bimbingan **Professor M. Cowling**. Topik penelitian saya ketika itu adalah mengenai operator maksimal yang diperumum di \mathbf{R}^n dan di grup Lie.

Operator maksimal pertama kali dipelajari oleh G.H. Hardy dan J.E. Littlewood pada tahun 1930. Dalam notasi sekarang, operator maksimal M didefinisikan sebagai operator yang memetakan fungsi $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ke fungsi $Mf: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, dengan

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

Hardy dan Littlewood membuktikan bahwa operator ini terbatas dari L^p ke L^p , untuk $1 < p \leq \infty$. Sebagai akibat dari keterbatasan operator maksimal M , kita mempunyai Teorema Diferensiasi Lebesgue, yang menyatakan bahwa

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x)$$

‘hampir di mana-mana’ [lihat E.M. Stein, 1970]. Selain itu, fungsi maksimal Hardy-Littlewood Mf dapat dipakai untuk menaksir operator konvolusi yang memetakan f ke $Kf = k_t * f$, yakni

$$Kf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} k_t(y) f(x-y) dy,$$

dengan *kernel* radial $k_t(y) = t^{-n} k_1(y/t)$. Ini merupakan hasil penting mengingat solusi persamaan diferensial klasik seperti persamaan panas $u_t = \Delta u$ dengan $u(x,0) = f(x)$ merupakan bentuk konvolusi

$$u(x,t) = H_t * f(x)$$

dengan kernel panas $H_1(x) = \frac{e^{-|x|^2/4}}{(4\pi)^{n/2}}$ [lihat Pinsky, 2002].

Pada 1976, Stein mempelajari *operator maksimal sferikal* M_S , yakni

$$M_S f(x) = \sup_{r>0} \int_{S^{n-1}} f(x-r\sigma) d\sigma,$$

dengan S^{n-1} menyatakan permukaan bola satuan di \mathbf{R}^n dan $d\sigma$ adalah ukuran permukaan pada S^{n-1} dengan massa total 1. Stein membuktikan bahwa operator ini terbatas dari L^p ke L^p , $n/(n-1) < p \leq \infty$, untuk $n \geq 3$. Hasil ini dibuktikan kembali oleh M. Cowling dan G. Mauceri pada 1979 dengan menggunakan transformasi Mellin. Keterbatasan operator M_S dari L^p ke L^p , $2 < p \leq \infty$, untuk $n = 2$, dibuktikan oleh J. Bourgain pada 1986. (Bourgain mendapatkan *Fields Medal* pada 1994, di antaranya untuk temuannya tentang operator maksimal sferikal M_S di \mathbf{R}^2 .)

Pada 1986, Cowling dan Mauceri mendefinisikan operator maksimal M_ϕ yang terkait dengan distribusi ϕ pada \mathbf{R}^n ,

$$M_\phi f(x) = \sup_{r>0} |\phi_r * f(x)|,$$

dengan $\phi_r(x) = r^{-n}\phi(x/r)$. Jika ϕ adalah ukuran permukaan pada S^{n-1} , maka M_ϕ adalah operator maksimal sferikal yang telah dipelajari oleh Stein sebelumnya. Cowling dan Mauceri (dan secara independen J.L. Rubio de Francia) membuktikan teorema berikut.

Teorema [Cowling-Mauceri; Rubio de Francia]. *Jika ϕ mempunyai support kompak di \mathbf{R}^n dan memenuhi*

$$|F\phi(r\sigma)| \leq C(1+r)^{-\alpha}, \quad r > 0, |\sigma| = 1,$$

untuk suatu $\alpha > 1/2$, maka M_ϕ terbatas di L^2 .

Dengan menggunakan transformasi Mellin, saya berhasil membuktikan keterbatasan M_ϕ untuk distribusi ϕ yang berbeda.

Teorema. *Jika ϕ mempunyai support kompak di \mathbf{R}^n dan memenuhi*

$$|F\phi(r\sigma)| \leq C(1+r)^{-\varepsilon} \text{ dan } |\delta_r F\phi(r\sigma)| \leq C(1+r)^{-1-\varepsilon}, \quad r > 0, |\sigma| = 1,$$

untuk suatu $\varepsilon > 0$, maka M_ϕ terbatas di L^2 .

Hasil ini dipublikasikan di *Bollettino della Unione Matematica Italiana* pada 1993, yang merupakan paper kedua saya. Paper pertama saya adalah tentang keterbatasan operator maksimal yang diperumum di grup Lie, yang dipublikasikan di *Pacific Journal of Mathematics* pada 1992. (Karena terlalu teknis, saya tidak menampilkannya di

sini.) Sebuah *spin-off* dari hasil penelitian tentang keterbatasan operator maksimal di grup Lie adalah metode alternatif penentuan bobot dominan dasar dari suatu sistem akar untuk aljabar Lie, yang papernya terbit pada 1997.

Pada 1995-1997, dengan dana hibah Program Dosen Muda dari DIKTI, saya mempelajari ketaksamaan berbobot untuk operator maksimal sperikal. Salah satu hasilnya adalah teorema berikut.

Teorema. Untuk $n \geq 3$ dan $n/(n-1) < p \leq 2$, ketaksamaan berbobot

$$\| M_S f \|_{p, w^\delta} \leq C_{p, \omega, \delta} \| f \|_{p, w^\delta}$$

berlaku untuk w di A_p dan $0 \leq \delta < [p(n-1) - n]/[n(p-1)]$.

Di sini $\| f \|_{p, w} = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$ dan A_p adalah kelas bobot w

yang memenuhi ketaksamaan

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < C$$

[lihat Stein, 1993]. Hasil di atas dipublikasikan di *Bulletin of Australian Mathematical Society* pada 1996. Hasil lainnya dipublikasikan di jurnal berbeda pada 1998. Untuk hasil-hasil penelitian ini, saya mendapat hibah publikasi dan juga hibah perjalanan dari DIKTI untuk mempresentasikannya di konferensi di Taiwan pada 2000.

Pada 2002, Cowling, J. Garcia-Cuerva, dan saya mempublikasikan hasil tentang fungsi maksimal fraksional yang berkaitan dengan rata-rata sferikal di *Bulletin of Australian Mathematical Society*.

2.2 Operator Integral Singular $(-\Delta)^{-iu/2}$

Keterkaitan antara operator maksimal, operator maksimal sferikal, dan persamaan gelombang dimensi- n , dapat dijelaskan melalui operator Laplace, yaitu operator diferensial

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Diilhami oleh rumus $F(-\Delta f)(\xi) = |2\pi\xi|^2 Ff(\xi)$, kita definisikan $(-\Delta)^{\alpha/2}$ untuk sebarang eksponen α melalui

$$F[(-\Delta)^{\alpha/2}f](\xi) = |2\pi\xi|^\alpha Ff(\xi).$$

Khususnya, untuk $\alpha = -iu$ dengan $u \neq 0$, kita mempunyai operator $I_{iu} = (-\Delta)^{-iu/2}$, yang dipelajari oleh A. Sikora dan J. Wright pada 2001. Operator I_{iu} dapat dikenali sebagai operator integral singular

$$I_{iu}f = K_{iu} * f,$$

dengan kernel $K_{iu}(x) = c(n,u) \cdot |x|^{-n+iu}$. Di sini $F(K_{iu})(\xi) = |2\pi\xi|^{-iu}$, dan karena itu I_{iu} memenuhi kesamaan Parseval

$$\| I_{iu}f \|_2 = \| f \|_2,$$

yakni I_{iu} merupakan suatu isometri di L^2 . Lebih jauh, dapat dibuktikan bahwa I_{iu} terbatas di L^p .

Teorema. $\| I_{iu} f \|_p \leq C_p (1 + \| u \|)^{n/p - n/2} \| f \|_p$, untuk $1 < p < \infty$.

Dengan menggunakan metode ‘dekomposisi atomik’, dapat dibuktikan bahwa operator I_{iu} juga terbatas dari ruang Hardy H^p ke ruang Lebesgue L^p untuk $0 < p \leq 1$, sebagaimana telah saya publikasikan di *Bulletin of Australian Mathematical Society* pada 2002.

Ketaksamaan untuk I_{iu} dapat digunakan untuk menaksir operator maksimal $M_{\psi,L}$ yang didefinisikan sebagai

$$M_{\psi,L} f = \sup_{t>0} | \psi(tL) f |,$$

di mana L adalah operator positif *self-adjoint*

$$L f = - \sum_{j,k=1}^n \partial_j a_{jk} \partial_k f,$$

dengan $a_{jk} = a_{kj}$ terdiferensialkan tak hingga kali, sementara $\psi = \psi_\alpha$ adalah fungsi yang terdefinisi pada \mathbf{R}^+

$$\psi_\alpha(\lambda) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-1} e^{ix\lambda} dx,$$

dan $\psi(tL)$ didefinisikan dengan bantuan teori spektral

$$\psi_\alpha(tL) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-1} e^{ixtL} dx.$$

Perhatikan bahwa $\psi_0(\lambda) = \cos(\lambda)$ dan $\psi_1(\lambda) = \frac{2 \sin(\lambda)}{\lambda}$ terkait erat

dengan persamaan gelombang dimensi- n $u_{tt} = \Delta u$, dengan syarat

awal $u(x,0) = g(x)$, $u_t(x,0) = f(x)$, yang solusinya mempunyai transformasi Fourier

$$Fu(\xi,t) = Fg(\xi) \cos(|2\pi\xi|t) + Ff(\xi) \frac{\sin(|2\pi\xi|t)}{|2\pi\xi|}.$$

Selanjutnya, dengan ketaksamaan untuk I_{iu} , diperoleh hasil berikut.

Teorema. *Jika $L = (-\Delta)^{1/2}$, maka $M_{\psi,L}$ terbatas di L^p untuk*

(a) $\operatorname{Re}(\alpha) > n/p - n/2 + 1/2$, $1 < p \leq 2$, dan

(b) $\operatorname{Re}(\alpha) > n/2 - n/p + 2/p - 1/2$, $2 < p \leq \infty$.

Jika $L = (-\Delta)^{1/2}$, maka untuk $\alpha = (n+1)/2$ operator $M_{\psi,L}$ tak lain adalah operator maksimal Hardy-Littlewood, sementara untuk $\alpha = (n-1)/2$ ia tak lain adalah operator maksimal sperikal yang dipelajari oleh Stein. Hasil di atas telah dibuktikan oleh Stein pada 1976. Saya dan A. Sikora membuktikannya kembali dengan menggunakan ketaksamaan untuk I_{iu} dan teori spektral pada 2002.

Sebagai akibat dari teorema di atas, kita mempunyai taksiran untuk $M_{\psi_1,(-\Delta)^{1/2}}$ yang terkait dengan solusi persamaan gelombang $u_{tt} = \Delta u$ dengan syarat awal Cauchy $u(x,0) = 0$ dan $u_t(x,0) = f(x)$. Persisnya, kita mempunyai ketaksamaan

$$\left\| \sup_{t>0} \left| \frac{u(\cdot,t)}{t} \right| \right\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

untuk $2n/(n+1) < p \leq \infty$ (jika $n \leq 3$) atau $2n/(n+1) < p < 2(n-2)/(n-3)$ (jika $n \geq 4$). Hasil pengamatan ini saya tulis bersama dengan **W. Setya-Budhi** dan kami publikasikan di *Jurnal Matematika dan Sains* pada 2004.

2.3 Operator Integral Fraksional $(-\Delta)^{-\alpha/2}$

Untuk $0 < \alpha < n$, operator $I_\alpha := (-\Delta)^{-\alpha/2}$ merupakan operator konvolusi dengan kernel $c(n, \alpha) \cdot |x|^{-n+\alpha}$, yang lebih dikenal sebagai *operator integral fraksional* atau *potensial Riesz*:

$$I_\alpha f(x) = c(n, \alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Sekitar tahun 1930, Hardy dan Littlewood (dan secara independen Sobolev) membuktikan ketaksamaan

$$\| I_\alpha f \|_q \leq C_{p,q} \| f \|_p,$$

untuk $1 < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$.

Secara umum, pengintegralan menghasilkan fungsi yang lebih mulus. Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev menyatakan bahwa operator integral fraksional I_α memetakan fungsi di L^p ke fungsi di L^q yang secara lokal berderajat α lebih baik. Untuk $\alpha = 2$, operator $I_2 = (-\Delta)^{-1}$ merupakan invers (lemah) dari operator Laplace. Dari

ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev, kita peroleh hampiran untuk solusi persamaan Poisson $(-\Delta)u = f$ di \mathbf{R}^n dengan $n \geq 3$, yakni

$$\|u\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_p,$$

untuk $1 < p < n/2$, $1/q = 1/p - 2/n$.

Pada 1970-an, D.R. Adams membuktikan keterbatasan operator I_α dari ruang Morrey $L^{p,\lambda}$ ke ruang $L^{q,\lambda}$, yakni

$$\|I_\alpha f\|_{p,\lambda} \leq C_{p,q,\lambda} \|f\|_{p,\lambda},$$

untuk $1 < p < n/\alpha$, $0 \leq \lambda < n - \alpha p$, dan $1/q = 1/p - \alpha/(n - \lambda)$. (Catatan:

f di $L^{p,\lambda}(X)$ berarti $\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{B=B(x,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \infty$. Jika $\lambda = 0$,

maka $L^{p,\lambda} = L^p$.) Hasil ini dibuktikan kembali oleh F. Chiarenza dan M. Frasca pada 1987, dan diperluas ke ruang Morrey yang diperumum oleh E. Nakai pada 1994.

Pada awal tahun 2000-an, Nakai mempelajari keterbatasan operator integral fraksional yang diperumum

$$I_\rho f(x) := \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y) dy,$$

dengan $\rho: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, di ruang Morrey yang diperumum

$$L^{p,\phi} =: \left\{ f : \|f\|_{p,\phi} = \sup_{B=B(a,r)} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

dengan $\phi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$.

Jika $\rho(t) = t^\alpha$, maka $I_\rho = I_\alpha$; dan jika $\phi(r) = r^{(\lambda-n)/p}$, maka $L^{p,\phi} = L^{p,\lambda}$.

Secara umum, fungsi ρ (dan juga ϕ) harus memenuhi persyaratan tertentu, khususnya *doubling condition*:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{r}{s} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{C} \leq \frac{\rho(r)}{\rho(s)} \leq C.$$

Hasil Nakai dikembangkan lebih lanjut oleh Eridani pada 2002. (Eridani mendapat gelar doktor, dengan predikat *cum laude*, dari FMIPA-ITB pada 2005.)

Dengan menggunakan teknik 'pemilahan integral', 'dekomposisi diadik' dan memanfaatkan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood, saya memperoleh hasil berikut, yang dipublikasikan di *Journal of the Indonesian Mathematical Society* pada 2003. (Dekomposisi diadik merupakan teknik dasar yang telah lama dikenal oleh peneliti analisis Fourier sebelum teori *wavelet* dan konsep *analisis multiresolusi* berkembang pada 1980-an.)

Teorema. Jika ρ dan ϕ memenuhi *doubling condition*, ϕ surjektif,

memenuhi $\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq C \cdot \phi(r)^p$ dan

$$\phi(r) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C \cdot \phi(r)^{p/q}, \quad r > 0,$$

untuk $1 < p < q < \infty$, maka I_ρ terbatas dari $L^{p,\phi}$ ke $L^{q,\psi}$, dengan $\psi = \phi^{p/q}$.

Pada 2004, Eridani, Gunawan, dan Nakai memperluas hasil ini dan mempublikasikannya di *Scientiae Mathematicae Japonicae*. Pada 2005, saya diundang sebagai pembicara tamu pada *Asian Mathematical Conference IV* di Singapura, untuk menyampaikan hasil penelitian tentang operator integral fraksional yang diperumum.

2.4 Rencana ke Depan

Pada 2006, dengan dana Riset ITB, saya dan beberapa rekan mempelajari keterbatasan operator $W.I_\rho$, dengan W menyatakan operator perkalian. Untuk $\rho(t) = t^\alpha$, subjek ini dipelajari oleh P. Olsen pada 1995 serta K. Kurata, S. Nishigaki, dan S. Sugano pada 1999, dalam rangka memahami perilaku solusi suatu persamaan Schrödinger. Hasil yang kami peroleh telah dikirimkan ke sebuah jurnal internasional. Dalam beberapa tahun ke depan, penelitian tentang operator integral fraksional yang diperumum dan ketaksamaan Olsen masih akan dilakukan. Dalam jangka pendek, keterbatasannya di ruang tak-homogen akan dipelajari. Beberapa peneliti telah bergerak ke arah itu, namun yang dikaji oleh mereka adalah operator integral fraksional I_α . Kami dalam hal ini akan menggarap operator integral fraksional yang diperumum I_ρ . Penelitian ini akan dilaksanakan bersama dengan Dr. Eridani dari Unair dan melibatkan seorang mahasiswa program doktor.

3. Kontribusi dalam Analisis Fungsional (dan Geometri)

Berpikir dan bekerja abstrak adalah ciri matematikawan. Bekerja abstrak berarti bekerja dengan intisari atau esensi dari objek-objek yang diamati. (Pelukis seperti Picasso pun memfokuskan dirinya pada esensi dari objek lukisannya.) 'Meng-abstrak' dapat pula diibaratkan meng-angkasa. Dengan mengangkasa, seseorang mempunyai cakrawala yang lebih luas. Itu yang telah kita lihat pada bagian sebelumnya: dengan mempelajari operator maksimal $M_{\psi,L}$, misalnya, kita telah mempelajari operator maksimal Hardy-Littlewood, operator maksimal sperikal Stein, dan perilaku persamaan gelombang sekaligus. *Sekali tepuk banyak nyamuk!*

Kecenderungan untuk mempelajari topik-topik dalam analisis, terutama analisis Fourier, persamaan diferensial, dan persamaan integral, secara abstrak sebagaimana yang dilakukan oleh V. Volterra (1860-1940), D. Hilbert (1862-1943), E.I. Fredholm (1866-1927), M.R. Frechet (1878-1973), dan F. Riesz (1880-1956) pada awal abad ke-20, telah memicu lahirnya sebuah anak-cabang matematika yang kita kenal sekarang sebagai *analisis fungsional*.

Aksioma-aksioma ruang bernorma diperkenalkan pertama kali oleh Riesz ketika ia mempelajari operator di ruang fungsi kontinu

$C[a,b]$ pada 1918, namun abstraksinya dirumuskan oleh S. Banach (1892-1945) dalam disertasinya pada 1920. Perluasannya untuk ruang bernorma atas lapangan bilangan kompleks C dikembangkan oleh N. Wiener (1894-1964) pada 1923 [lihat W. Rudin, 1973].

Perlunya bekerja di suatu 'ruang' tertentu dengan 'norma' tertentu dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalkan kita ingin mengetahui apakah persamaan diferensial orde-1

$$dy/dx = f(x,y)$$

dengan syarat awal

$$y(x_0) = y_0$$

mempunyai solusi; dan bila terdapat solusi, apakah ia tunggal.

Untuk itu kita mengubahnya menjadi persamaan integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Persamaan integral ini dapat dinyatakan secara singkat sebagai

$$y(x) = Ty(x),$$

dengan T menyatakan operator integral

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Fungsi $y(x)$ yang memenuhi persamaan di atas tak lain merupakan *titik tetap* operator T . Sekilas tampak tidak mudah mencari titik tetap tersebut. Jika kita coba substitusikan sebarang fungsi $y_0(x)$ ke

dalam persamaan di atas, maka kecil kemungkinannya $Ty_0(x) = y_0(x)$. Jika itu terjadi, maka kita telah menyelesaikan masalah nilai awal di atas. Secara umum, kita akan peroleh sebuah fungsi lain, sebutlah $y_1(x)$, yang mungkin 'jauh' dari $y_0(x)$. Namun (*blink!*), bagaimana kalau kita substitusikan $y_1(x)$ sekarang, untuk mendapatkan fungsi lain lagi, sebutlah $y_2(x)$. Jika kita lakukan ini terus-menerus, maka akan kita dapatkan *iterasi Picard*

$$y_n(x) = Ty_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Di sini kita berharap bahwa barisan $y_n(x)$ 'konvergen' ke suatu fungsi $y(x)$, yang merupakan solusi persamaan yang sedang kita cari. Harapan ini akan terkabul apabila $y(x)$ kontinu dan $Ty_n(x)$ konvergen ke $Ty(x)$. Permasalahannya sekarang adalah: apakah artinya $y_n(x)$ konvergen ke $y(x)$ dan sifat apakah yang harus dimiliki oleh T agar $Ty_n(x)$ konvergen ke $Ty(x)$? Dalam konteks seperti inilah kita perlu bekerja dalam ruang tertentu yang dilengkapi dengan konsep jarak atau norma tertentu.

Sebelum saya paparkan hasil-hasil penelitian saya dalam analisis fungsional (dan aplikasinya dalam geometri), terlebih dahulu saya harus menyajikan materi kuliah yang pernah saya dapat dari Profesor Moedomo dan Drs. E. Huhahaeen, M.Si., khususnya tentang *ruang bernorma* dan *ruang hasilkali dalam*.

Ruang bernorma adalah ruang vektor X (atas lapangan $F = \mathbf{R}$ atau \mathbf{C}) yang dilengkapi dengan norma $\|\bullet\| : X \rightarrow \mathbf{R}$ yang bersifat

(a) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$; $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;

(b) $\|cx\| = |c| \cdot \|x\| \quad \forall c \in F, x \in X$;

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

Contoh ruang bernorma adalah \mathbf{R}^n dengan $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Contoh lainnya adalah ruang Lebesgue $L^p(\mathbf{R})$ yang beranggotakan

fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ dengan $\|f\|_p = \left[\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty$.

Di ruang bernorma X , barisan (x_n) dikatakan *konvergen* ke x apabila $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$. Barisan (x_n) disebut *barisan Cauchy* jika $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ untuk $m, n \rightarrow \infty$. Jika setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan yang konvergen (ke suatu x di X), maka X merupakan ruang yang *lengkap* dan disebut *ruang Banach*. Jika $T : X \rightarrow X$ merupakan operator terbatas dan (y_n) konvergen ke y , maka (Ty_n) konvergen ke Ty . Lebih jauh, jika X merupakan ruang Banach dan $T : X \rightarrow X$ bersifat *kontraktif*, yakni terdapat $C < 1$ sehingga

$$\|Tx - Ty\| \leq C \|x - y\| \quad \forall x, y \in X,$$

maka T mempunyai titik tetap (yang tunggal).

Selanjutnya, *ruang hasilkali dalam* adalah ruang vektor X yang dilengkapi dengan *hasilkali dalam* $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow X$ yang bersifat

(a) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;

(b) $(x, y) = (y, x)^*$;

(c) $(cx, y) = c(x, y)$;

(d) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$.

[Catatan. Untuk bilangan kompleks, z^* berarti z konjugat.] Contoh ruang hasilkali dalam adalah \mathbb{C}^n dengan hasilkali dalam $(x, y) = x_1 y_1^* + \dots + x_n y_n^*$. Contoh lainnya adalah ruang l^2 yang beranggotakan barisan $x = (x_k)$ dengan hasilkali dalam $(x, y) = \sum_k x_k y_k^*$. Di ruang hasilkali dalam, dapat didefinisikan norma $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Ruang hasilkali dalam yang lengkap disebut *ruang Hilbert*.

Konsep ruang bernorma dan ruang hasilkali dalam merupakan pangkal analisis fungsional. Materi selanjutnya mencakup ruang fungsi tertentu (khususnya ruang Lebesgue), operator linear (terbatas dan tak terbatas), dan teori spektral, yang tidak dapat saya jelaskan semuanya di sini. Pada bagian sebelumnya, kita telah melihat aplikasi sejumlah konsep analisis fungsional dalam analisis Fourier modern. Aplikasi analisis fungsional dapat pula dijumpai dalam persamaan diferensial, persamaan integral, analisis numerik, statistika, teori kontrol, riset operasi, fisika, dan *engineering science* pada umumnya [lihat N. Young, 1988].

3.1 Ruang Bernorma- n dan Ruang Hasilkali Dalam- n

Pada awal tahun 2000, melalui Dr. Mashadi dari Universitas Riau, saya berkenalan dengan konsep *ruang bernorma-2*, yang merupakan pengembangan dari ruang bernorma. Bila di ruang bernorma ada konsep jarak atau 'panjang', maka di ruang bernorma-2 kita dibekali dengan konsep 'luas'. Konsep ruang bernorma-2 pertama kali diperkenalkan oleh S. Gähler pada 1960-an. Dengan segera kita dapat memperumum pola ini dan merumuskan konsep *ruang bernorma- n* . Terkait dengan konsep ini, pada akhir 1980-an, A. Misiak mengembangkan konsep *ruang hasilkali dalam- n* .

Untuk kemudahan notasi, selanjutnya kita akan membatasi diri pada ruang vektor atas lapangan real yang berdimensi sekurang-kurangnya n . Ruang bernorma- n adalah ruang vektor X yang dilengkapi dengan *norma- n* $\|\bullet, \dots, \bullet\| : X^n \rightarrow \mathbf{R}$ yang bersifat

- (a) $\|x_1, \dots, x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ bergantung linear;
- (b) $\|x_1, \dots, x_n\| = \|x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\|$ untuk tiap permutasi $\{i_1, \dots, i_n\}$ dari $\{1, \dots, n\}$;
- (c) $\|cx_1, x_2, \dots, x_n\| = |c| \cdot \|x_1, \dots, x_n\|$ untuk tiap bilangan real c ;
- (d) $\|x_1 + x_1', x_2, \dots, x_n\| \leq \|x_1, x_2, \dots, x_n\| + \|x_1', x_2, \dots, x_n\|$.

Jika X dilengkapi dengan hasilkali dalam (\cdot, \cdot) , maka $\|x_1, \dots, x_n\| := \det[(x_i, x_j)]^{1/2}$ merupakan norma- n pada X . Secara geometris, nilai

$\|x_1, \dots, x_n\|$ dapat ditafsirkan sebagai volume paralelepipedium berdimensi- n yang direntang oleh x_1, \dots, x_n di X .

Ruang hasilkali dalam- n adalah ruang vektor X yang dilengkapi dengan hasilkali dalam- n $(\cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot) : X^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ yang bersifat

(a) $(x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n) \geq 0$; $(x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ bergantung linear;

(b) $(x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n) = (x_{i_1}, x_{i_1} | x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ untuk tiap permutasi $\{i_1, \dots, i_n\}$ dari $\{1, \dots, n\}$;

(c) $(x_0, x_1 | x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_0 | x_2, \dots, x_n)$

(c) $(cx_0, x_1 | x_2, \dots, x_n) = c(x_0, x_1 | x_2, \dots, x_n)$ untuk tiap bilangan real c ;

(d) $(x_0 + x_0', x_1 | x_2, \dots, x_n) = (x_0, x_1 | x_2, \dots, x_n) + (x_0', x_1 | x_2, \dots, x_n)$.

Jika X dilengkapi dengan hasilkali dalam (\cdot, \cdot) , maka X dapat pula dilengkapi dengan hasilkali dalam- n

$$(x_0, x_1 | x_2, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} (x_0, x_1) & (x_0, x_2) & \cdots & (x_0, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \cdots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \cdots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

Perhatikan bahwa untuk $x_0 = x_1$, $(x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n) = \det[(x_i, x_j)]$. Secara umum, di ruang hasilkali dalam- n dapat didefinisikan norma- n

$\|x_1, \dots, x_n\| = (x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n)^{1/2}$. Ketaksamaan segitiganya merupakan akibat dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$|(x_0, x_1 | x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_0, x_2, \dots, x_n\| \|x_1, x_2, \dots, x_n\|.$$

Lebih jauh, dapat dibuktikan bahwa kesamaan pada ketaksamaan Cauchy-Schwarz berlaku jika dan hanya jika $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linear. Hasil penelitian saya tentang hasil kali dalam- n , norma- n , dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz telah dipublikasikan di *Scientiae Mathematicae Japonicae* pada 2002. Generalisasi dari ketaksamaan Bessel dan kesamaan Parseval di ruang hasil kali dalam- n juga saya peroleh dan telah dipublikasikan di *Periodica Mathematica Hungarica* pada 2002 (namun tidak saya tampilkan di sini karena terlalu teknis).

Bila di ruang hasil kali dalam kita dapat mendefinisikan hasil kali dalam- n sebagaimana dirumuskan di atas, maka di ruang hasil kali dalam- n kita dapat pula mendefinisikan hasil kali dalam.

Teorema. Misalkan $(X, (\cdot, \cdot)_1, \dots, \cdot)$ adalah ruang hasil kali dalam- n . Maka, untuk sebarang himpunan $\{a_1, \dots, a_n\}$ yang bebas linear,

$$(x, y) := \sum_{\{i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, n\}} (x, y | a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$$

merupakan hasil kali dalam pada X .

Hasil ini mengatakan bahwa ruang hasil kali dalam- n yang diperkenalkan oleh Misiak sesungguhnya merupakan ruang hasil kali dalam. Hasil penelitian ini telah dipublikasikan di *Soochow Journal of Mathematics* pada 2002. Hasil serupa untuk ruang bernorma- n ,

baik untuk kasus umum maupun khusus, telah dipublikasikan di *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* dan *Bulletin of Australian Mathematical Society* pada 2001.

3.2 Ketaksamaan Cauchy-Schwarz yang Diperumum dan Sudut antara Dua Subruang di Ruang Hasilkali Dalam

Dengan hasil-hasil yang saya peroleh, kajian tentang ruang bernorma- n dan ruang hasilkali dalam- n pada dasarnya sudah berakhir, karena hampir semuanya dapat dikembalikan ke kerangka ruang bernorma dan ruang hasilkali dalam. Namun, masih ada yang menarik untuk dipelajari berkaitan dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan interpretasi geometrisnya. Persisnya, masih sekitar tahun 2000-an, saya tertarik dengan generalisasi dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz yang dirumuskan oleh S. Kurepa pada 1966 sebagai berikut.

Teorema [Kurepa]. Misalkan $(X, (\cdot , \cdot))$ ruang hasilkali dalam, $\{u_1, \dots, u_n\}$ dan $\{v_1, \dots, v_n\}$ dua himpunan sebarang di X . Maka, kita mempunyai

$$|\det[(u_i, v_j)]|^2 \leq \det[(u_i, u_j)] \cdot \det[(v_i, v_j)]$$

dan kesamaan berlaku jika dan hanya jika subruang yang direntang oleh $\{u_1, \dots, u_n\}$ termuat dalam subruang yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_n\}$ atau sebaliknya.

Pada 2001, I.B. Risteski dan K.G. Trenčevski merumuskan generalisasinya untuk himpunan $\{u_1, \dots, u_n\}$ dan $\{v_1, \dots, v_m\}$ dengan $m \geq n$, dalam rangka mendefinisikan sudut antara dua subruang yang direntang oleh kedua himpunan tersebut. Persisnya, mereka ‘membuktikan’ ketaksamaan

$$\det(MM^T) \leq \det[(u_i, u_i)] \cdot \det[(v_k, v_l)]$$

dengan $M := [(u_i, v_k)]$. Namun, pada 2003, saya, O. Neswan, dan W. Setya-Budhi, menemukan bahwa ketaksamaan ini hanya berlaku untuk kasus $m = n$, tidak untuk $m > n$. Sebagai contoh, di \mathbf{R}^3 , ambil $U = \text{span}\{u\}$ dengan $u = (1, 0, 0)$, dan $V = \text{span}\{v_1, v_2\}$ dengan $v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ dan $v_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Maka $\det(MM^T) = (u, v_1)^2 + (u, v_2)^2 = \frac{1}{2}$, sementara $\det[(u, u)] \cdot \det[(v_k, v_l)] = \frac{3}{8}$.

Tidak terlalu sulit bagi kami untuk menemukan kesalahan mereka pada ‘pembuktian’ ketaksamaan di atas. Namun, untuk memperbaikinya, kami perlu kembali ke esensi sudut antara dua subruang, yang terkait erat dengan ketaksamaan tersebut. Misalnya, sudut θ antara subruang $U = \text{span}\{u\}$ dan $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ di ruang hasil-kali dalam X diberikan oleh rumus

$$\cos^2 \theta = \frac{(u, u_V)^2}{\|u\|^2 \|u_V\|^2},$$

dengan u_V menyatakan vektor proyeksi u terhadap V .

Jika kita tuliskan $u = u_V + u_V^\perp$ dengan u_V^\perp menyatakan komplemen ortogonal u terhadap V , maka rumus ini setara dengan

$$\cos^2 \theta = \frac{\|u_V\|^2}{\|u\|^2}.$$

Jadi, nilai $\cos \theta$ sama dengan rasio panjang vektor proyeksi u terhadap V dan panjang vektor u . Secara umum, untuk berbagai kasus yang dikenal, kami mengamati bahwa nilai cosinus sudut yang dibentuk oleh subruang $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ dan $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ dengan $m \geq n$ senantiasa sama dengan rasio volume paralelepipedium berdimensi- n yang direntang oleh vektor proyeksi u_1, \dots, u_n terhadap V dan volume paralelepipedium berdimensi- n yang direntang oleh u_1, \dots, u_n . Berdasarkan pengamatan inilah kami pada akhirnya dapat memperbaiki kesalahan Risteski dan Trenčevski dan merumuskan sudut antara dua subruang di ruang hasilkali dalam, sebagaimana telah kami publikasikan di *Beiträge zur Algebra und Geometrie* pada 2005.

Teorema. Misalkan $\{u_1, \dots, u_n\}$ dan $\{v_1, \dots, v_m\}$ dua himpunan bebas linear di X , dengan $m \geq n$. Maka, kita mempunyai

$$\det M \tilde{M}^T \leq \det[(u_i, u_j)] \cdot \det^r[(v_k, v_l)],$$

dengan $M := [(u_i, v_k)]$ dan $\tilde{M} := [(u_i, v_k \mid v_{i_2(k)}, \dots, v_{i_m(k)})]$ dengan $\{i_2(k), \dots, i_m(k)\} = \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{k\}$, $k = 1, 2, \dots, m$; dan kesamaan berlaku jika dan

hanya jika subruang yang direntang oleh $\{u_1, \dots, u_n\}$ termuat dalam subruang yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_m\}$. Lebih jauh,

$$\cos^2 \theta := \frac{\det M \tilde{M}^T}{\det[(u_i, u_j)] \cdot \det^n [(v_k, v_l)]}$$

mendefinisikan sudut θ antara subruang yang direntang oleh $\{u_1, \dots, u_n\}$ dan subruang yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_m\}$.

Rumus ini mencakup rumus sudut antara dua garis, sudut antara garis dan subruang, serta sudut antara dua subruang berdimensi sama yang tersirat dalam Teorema Kurepa. Lagi-lagi, *sekali tepuk banyak nyamuk!* Lebih jauh, jika $\{u_1, \dots, u_n\}$ dan $\{v_1, \dots, v_m\}$ bersifat ‘ortonormal’, maka sudut antara kedua subruangnya terkait erat dengan *sudut kanonik* atau *sudut utama* sebagaimana dijelaskan oleh Risteski dan Trenčevski dalam teorema berikut.

Teorema [Risteski & Trenčevski]. Misalkan $\{u_1, \dots, u_n\}$ dan $\{v_1, \dots, v_m\}$ ortonormal, dan $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_n$ sudut kanonik antara $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ dan $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ yang didefinisikan secara rekursif:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \max_{u \in U, \|u\|=1} \max_{v \in V, \|v\|=1} (u, v) = (u_1, v_1) \\ \cos \theta_{i+1} &= \max_{u \in U_i, \|u\|=1} \max_{v \in V_i, \|v\|=1} (u, v) = (u_{i+1}, v_{i+1}) \end{aligned}$$

dengan U_i menyatakan komplemen ortogonal dari u_i terhadap U_{i-1} dan V_i menyatakan komplemen ortogonal dari v_i terhadap V_{i-1} (dengan $U_0 = U$ dan $V_0 = V$). Maka $\cos^2 \theta = \cos^2 \theta_1 \times \dots \times \cos^2 \theta_n$.

Statistikawan menggunakan sudut kanonik sebagai ukuran ketergantungan sejumlah peubah acak terhadap sejumlah peubah acak lainnya. Untuk $n = 2$, khususnya, nilai $\cos \theta$ merupakan hasilkali korelasi maksimum dan korelasi minimum antara u di U dengan penaksir terbaiknya di V , sebagaimana dinyatakan oleh teorema berikut (yang dapat dibuktikan hanya dengan kalkulus elementer).

Teorema. Untuk $n = 2$, $\cos \theta = \max_{u \in U, \|u\|=1} \max_{v \in V, \|v\|=1} (u, v) \cdot \min_{u \in U, \|u\|=1} \max_{v \in V, \|v\|=1} (u, v)$.

Untuk n sebarang, saya dan Neswan dapat membuktikan teorema berikut dengan menggunakan pengetahuan aljabar linear elementer dan kalkulus peubah banyak.

Teorema. Nilai $\cos \theta$ sama dengan hasilkali semua nilai kritis fungsi

$$f(u) = \max_{v \in V, \|v\|=1} (u, v), \quad u \in U, \|u\|=1.$$

Teorema. Nilai $\cos \theta$ sama dengan volume paralelepipedium berdimensi- n yang direntang oleh vektor $\text{proj}_V(u_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Hasil ini kami publikasikan di *Journal of the Indonesian Mathematical Society* pada 2005. Penelitian tentang sudut antara dua subruang didanai oleh Sub-Proyek QUE Matematika ITB.

3.3 Rencana ke Depan

Dalam beberapa tahun terakhir, saya dan rekan telah mempelajari pula konsep ortogonalitas di ruang bernorma- n dan ruang hasilkali dalam- n . Ke depan, mengingat bahwa hasil-hasil yang diperoleh banyak bersentuhan dengan geometri, saya berencana untuk mempelajari *aljabar geometrik*, dalam rangka meng-abstrak lebih jauh, dengan harapan mempunyai cakrawala yang lebih luas.

Selain itu, kami juga akan mulai mengkaji area aplikasi analisis fungsional, khususnya dalam analisis numerik. Penelitian pertama ke arah itu adalah tentang interpolasi yang meminimumkan fungsional tertentu (seperti kurvatur atau 'energi' secara umum). Sebagai ilustrasi, diberikan n buah titik $(x_1, c_1), (x_2, c_2), \dots, (x_n, c_n)$, dengan $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, permasalahannya adalah bagaimana mencari fungsi terdiferensialkan (dua kali atau lebih) pada selang $[a, b]$ yang melalui n titik tersebut dan memiliki kurvatur minimum. Selain konsep-konsep analisis fungsional, konsep-konsep analisis Fourier juga diperlukan untuk memecahkan masalah ini. Penelitian ini akan dilaksanakan bersama dengan Dr. A.R. Alghofari dari Unibraw dan seorang mahasiswa program doktor Unpad.

4. Epilog: Renungan dan Harapan

Dihitung mulai dari Dr. Sam Ratulangi, Indonesia kini memiliki hampir 100 doktor matematika, tersebar di sejumlah perguruan tinggi di Indonesia (31 di antaranya dosen aktif di ITB). Jumlah ini kira-kira sama dengan jumlah total doktor matematika di NUS dan NTU Singapura. Namun, dalam hal produktivitas riset, kita jauh tertinggal. Per Desember 2006 tercatat hanya 163 paper karya matematikawan Indonesia yang dipublikasikan di berbagai jurnal yang dipantau oleh *Mathematical Reviews*. Jumlah ini sudah termasuk 52 paper yang terbit di *Journal of the Indonesian Mathematical Society* (*Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia*) sejak tahun 2003. (Sebagai pembandingan, Singapura telah membukukan 4741 paper di *Mathematical Reviews*.) Sebanyak 112 di antara 163 paper tadi adalah karya matematikawan ITB. Paper karya Profesor Moedomo, dan beberapa paper karya **Profesor S.M. Nababan** dan **Profesor Edy Soewono** yang terbit dari awal 1970-an hingga awal 1990-an, juga terekam di *Mathematical Reviews*, namun tidak membawa nama ITB ataupun Indonesia. Bila paper-paper tersebut dihitung, maka jumlah total paper matematikawan ITB mencapai 150-an dan jumlah total paper matematikawan Indonesia mungkin mencapai 200-an. (Sebagai pembandingan lainnya, Malaysia per Desember 2006 telah membukukan 701 paper di *Mathematical Reviews*.)

Dari statistik sederhana ini, kita dapat menyimpulkan bahwa perkembangan matematika di Indonesia masih jauh tertinggal dari negara-negara lainnya. Bukan hanya karena jumlah matematikawan di Indonesia belum mencapai *critical mass*, tetapi produktivitasnya juga rendah. Selain itu, penelitian dalam bidang dasar seperti matematika belum (dan mungkin tidak akan pernah) menjadi prioritas. Untuk mendapatkan hibah penelitian, sebagian dosen matematika terpaksa 'menjual diri' dengan menampilkan judul berbau fisika, teknologi informasi, atau industri, karena bidang-bidang itulah yang diprioritaskan baik oleh DIKTI maupun Menristek. Kelak, ketika dana hibah diperoleh, *output*-nya entah termasuk karya matematika atau bukan, dipublikasikan atau tidak, seringkali tidak dipertanyakan. Pada kenyataannya, jumlah paper matematika hasil penelitian yang didanai oleh DIKTI atau Menristek dan dipublikasikan di jurnal internasional bisa dihitung dengan jari. Sebagian besar paper yang terekam di *Mathematical Reviews* dan membawa nama institusinya di Indonesia adalah buah 'proyek cinta', meminjam istilah **Profesor Maman A. Djauhari**. Sebagian besar lainnya dihasilkan ketika si penulis menempuh program doktornya di luar negeri.

Untuk bertahan dan tetap berkarya dalam kondisi seperti ini diperlukan niat dan tekad yang kuat. Selain itu, jaringan dengan pe-

neliti di luar negeri mutlak diperlukan. Dengan jaringan yang saya miliki, misalnya, saya beberapa kali diundang dan dibiayai untuk berkunjung ke universitas di luar negeri. Permasalahannya adalah bahwa saya tidak dapat dengan mudah mengundang dan membiayai kolega dari luar negeri untuk berkunjung ke ITB, karena keterbatasan dana yang ada. Fasilitas dan dukungan dari institusi setempat, sekecil apapun, sangat berarti. Manfaat dana Riset ITB yang dikucurkan oleh LPPM sejak 2004, misalnya, dapat dirasakan baik oleh para dosen maupun ITB sendiri, dan cepat atau lambat buahnya dapat dinikmati bersama.

Namun, dalam struktur organisasi yang baru di ITB, peran KK dan juga komunikasi dan sinergi antar-KK saat ini masih jauh dari optimal. Selain masih ada kebingungan dengan penulisan alamat dan terjemahan KK dalam bahasa Inggris, 'tembok departemen' terasa masih ada sekalipun departemen sudah dihapus. Sebagai contoh, dalam struktur sekarang sebetulnya tidak ada lagi sekat di antara dosen matematika dan dosen fisika, kecuali gedungnya terpisah. Namun, seberapa seringkah dalam setahun terakhir komunikasi ilmiah terjalin di antara kedua komunitas? Lalu, bila kita tengok kurikulum kedua Program Studi Matematika dan Fisika, seberapa banyakkah irisannya? Tidakkah janggal bila irisannya hanya sejumlah matakuliah tahun pertama?

Komunikasi, apalagi sinergi, rupanya memang tidak mudah. Di milis Dosen ITB, seorang dosen teknik pernah mengatakan bahwa matematikawan dan *scientists* perlu mendukung para *engineers* untuk memecahkan permasalahan dalam *engineering*, jangan menekuni sains hanya untuk sains. Tanggapan saya waktu itu adalah “OK, saya menguasai analisis Fourier dan analisis fungsional, apa yang bisa saya bantu?” Saya sungguh berharap para *engineers* dapat menguraikan permasalahannya cukup rinci sehingga jelas dukungan matematika (dan sains) apa yang diperlukan oleh mereka. Sayangnya, tidak ada tanggapan lebih lanjut hingga saat ini. Sebagian rekan lainnya di ITB berpandangan bahwa ‘sains untuk sains’ tidak perlu dicegah. Menurut mereka, banyak penemuan yang pada awalnya bersifat ‘sains untuk sains’ berdampak positif pada bidang lain di kemudian hari.

Di antara para matematikawan sendiri, konon ada ‘matematika murni’ dan ‘matematika terapan’, walaupun sesungguhnya proses yang dilakukan oleh para ‘matematikawan terapan’ tidaklah banyak berbeda dengan yang dilakukan oleh ‘matematikawan murni’. Yang seringkali berbeda adalah sumber permasalahannya: yang satu muncul ketika mempelajari matematika itu sendiri, sementara yang lainnya dipicu oleh masalah nyata dari bidang lain. G. Gonnert mengilustrasikan keterkaitan antarcabang matematika

dan penerapannya sebagai rantai makanan. Sebagai contoh, dalam suatu rantai makanan, ada yang harus menggarap sawah, memilih bibit, menanam dan menuai padi, memberi makan ternak, mengangkut dan memasarkan, dan akhirnya kita semua dapat menikmati semur daging di rumah. Setiap tahap memerlukan tahap sebelumnya dan menopang tahap selanjutnya.

Jadi, bila kita ingin hidup di dunia yang kian bergantung pada teknologi yang semakin canggih seperti sekarang ini, kita harus menjaga semua mata rantai yang ada — termasuk yang paling teoritis sekalipun. Bila tidak ada yang menggarap sawah, dalam beberapa tahun kita mungkin takkan dapat menikmati semur daging lagi! Dan bila tidak ada yang menekuni ‘matematika murni’, dalam beberapa tahun kita mungkin takkan pernah mendengar penemuan teknologi baru lagi.

Bila kita telusuri kemajuan teknologi di Eropa dan negara-negara maju lainnya, maka kita akan melihat bahwa mereka memang pantas menikmatinya karena mereka telah menanam bibitnya sebelumnya. Pada jaman *Renaissance* di Eropa, penelitian lebih banyak dilakukan di akademi kerajaan, bukannya di universitas. Sebagian area penelitian bersifat ‘terapan’, namun sebagian lainnya lebih bersifat ‘murni’, alias ‘riset untuk riset’. Pihak Kerajaan (baca:

Pemerintah) mendanai secara *generous* penelitian ‘murni’, di antaranya bidang matematika, demi pengembangan pengetahuan manusia. Singkat kata, matematikawan dan *scientists* pada jaman itu tidak mengalami kesulitan dana dan dapat mendedikasikan waktu sepenuhnya untuk mengembangkan ilmu. Karena itu, matematika dan sains berkembang subur dan berbuah!

Jelaslah kiranya sekarang mengapa teknologi hasil karya putra bangsa merupakan barang langka di Indonesia, karena matematika (dan mungkin sains juga) — yang seharusnya dikembangkan untuk menopang pengembangan teknologi baru — belum terlalu berkembang. Selain komunitas matematikawan yang belum terlalu kuat dan pendanaan untuk penelitian dalam matematika yang kurang memadai, komunikasi dan sinergi di antara komunitas matematika, sains dan *engineering* belum terbangun. Bila masalahnya sudah begitu gamblang, solusinya pun sesungguhnya amat jelas: penelitian dalam bidang matematika (dan sains) mau tidak mau harus digalakkan dan didukung, dan untuk itu komunitas matematikawan khususnya perlu diperkuat. Selain itu, komunikasi dan sinergi antar-komunitas perlu dibangun. Di ITB khususnya, adanya Advanced Research Program yang bergulir baru-baru ini, bila terealisasi kelak, harus kita manfaatkan bersama untuk membangun sinergi dan melompat maju!

Ucapan Terima Kasih

Pertama, ucapan terima kasih penulis tujukan kepada Papah (alm.) dan Mamah atas didikan dan kasih-sayangannya, dan kepada Istri tercinta, Ita Ananta, serta anak-anak tersayang, Rubio dan Viola, atas dukungan, pengertian, dan kesabarannya. Penulis juga berhutang-budi kepada Prof. Moedomo (alm.), Prof. Michael Cowling (UNSW), Drs. E. Hutahaean, M.Si., Dr. Wono Setya-Budhi, yang telah memperkenalkan analisis kepada penulis; dan juga kepada Prof. A. Arifin (alm.), Prof. M. Ansjar, Prof. S.M. Nababan, Prof. Eiichi Nakai (Osaka), Dr. Bana G. Kartasasmita, Drs. I Nyoman Susila, M.Sc., Prof. Maman A. Djauhari, yang telah membagikan ilmunya. Kepada beberapa kolega yang sering berdiskusi dengan penulis, khususnya Prof. Edy Soewono, Dr. Iwan Pranoto, Dr. Oki Neswan, Dr. Andonowati, Prof. Edy Tri Baskoro, Dr. Yudi Soeharyadi, Dr. Theo Tuwankotta, dan seluruh anggota KK Analisis dan Geometri serta KK lainnya di eks-Departemen Matematika ITB, penulis ucapkan terima kasih. Secara khusus penulis berterima kasih kepada Prof. Wiranto Arismunandar dan Prof. Bambang Hidayat yang sedikit banyak telah mempengaruhi penulis dalam kehidupan akademis. Ucapan terima kasih penulis sampaikan pula kepada Prof. Deny Juanda, Dr. Satria Bijaksana, dan Dr. Sri Widiyantoro, atas komunikasi yang telah terjalin selama ini. Akhirnya, penulis tak lupa menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para pejabat eksekutif dan normatif serta karyawan di ITB periode 1987-2006, yang tak dapat disebutkan namanya satu per satu.

Daftar Pustaka

- A.D. Aczel (1996), *Fermat's Last Theorem, Four Walls Eight Windows*, New York.
- D.R. Adams (1975), "A note on Riesz potentials", *Duke Math. J.* 42, 765-778.
- J. Bourgain (1986), "Averages in the plane over convex curves and maximal operators", *J. Analyse Math.* 47, 69-85.
- F. Chiarenza and M. Frasca (1987), "Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal functions", *Rend. Mat.* 7, 273-279.
- M. Cowling, J. Garcia-Cuerva, and H. Gunawan (2002), "Weighted estimates for fractional maximal functions related to spherical means", *Bull. Austral. Math. Soc.* 66, 75-90.
- M. Cowling and G. Mauceri (1979), "On maximal functions", *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 49, 79-87.
- M. Cowling and G. Mauceri (1986), "Inequalities for some maximal functions. II", *Trans. Amer. Math. Soc.* 296, 341-365.
- Eridani (2002), "On the boundedness of a generalized fractional integral on generalized Morrey spaces", *Tamkang J. Math.* 33, 335-340.
- Eridani and H. Gunawan (2005), "Stummel class and Morrey spaces", *Southeast Asian Bull. Math.* 29, 1053-1056.
- Eridani, H. Gunawan, and E. Nakai (2004), "On generalized fractional integral operators", *Sci. Math. Jpn.* 60, 539-550.
- G.B. Folland (1992), *Fourier Analysis and Its Applications*, Brooks/Cole, Pacific Grove.
- S. Gähler (1964), "Lineare 2-normierte Räume", *Math. Nachr.* 28, 1-43.

- G. Gonnet (1994), artikel di *Zürich Intelligencer*, International Congress of Mathematicians.
- B. Grun (1991), *The Timetables of History*, 3rd ed., Simon & Schuster, New York.
- J. Gullberg (1997), *Mathematics: From the Birth of Numbers*, W.W. Norton & Company, New York.
- H. Gunawan (1991), *Maximal Functions and Harmonic Analysis*, Ph.D. Thesis, University of New South Wales, Sydney. [Abstrak terbit pada 1993 di *Bull. Austral. Math. Soc.* 47, 351.]
- H. Gunawan (1992), "A generalization of maximal functions on compact semi-simple Lie groups", *Pacific J. Math.* 156, 119-134.
- H. Gunawan (1993), " L^2 estimates for some maximal functions", *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) 7, 263-282.
- H. Gunawan (1996), "On weighted estimates for Stein's maximal function", *Bull. Austral. Math. Soc.* 54, 35-39.
- H. Gunawan (1997), "On finding the fundamental dominant weights of a root system", *Southeast Asian Bull. Math.* 21, 321-328.
- H. Gunawan (1998), "Some weighted estimates for Stein's maximal function", *Bull. Malaysian Math. Soc.* 21, 101-105.
- H. Gunawan (2001), "The space of p -summable sequences and its natural n -norm", *Bull. Austral. Math. Soc.* 64, 137-147.
- H. Gunawan (2001), "An inner product that makes a set of vectors orthonormal", *Austral. Math. Soc. Gazette* 28, 194-197.
- H. Gunawan (2002), "On n -inner products, n -norms, and the Cauchy-Schwarz inequality", *Sci. Math. Jpn.* 55, 53-60.
- H. Gunawan (2002), "A generalization of Bessel's inequality and Parseval's identity", *Periodica Math. Hungarica* 44, 177-181.
- H. Gunawan (2002), "Inner products on n -inner product spaces", *Soochow J. Math.* 28, 389-398.

- H. Gunawan (2002), "On convergence in n -inner product spaces", *Bull. Malaysian. Math. Sci. Sc.* 25, 11-16.
- H. Gunawan (2002), "Some weighted estimates for imaginary powers of the Laplace operator", *Bull. Austral. Math. Soc.* 65, 129-135.
- H. Gunawan (2003), "A note on generalized fractional integral operators", *J. Indones. Math. Soc.* 9, 39-43.
- H. Gunawan (2005), "Generalized fractional integral operators and their modified versions", *Proceedings of Fourth Asian Mathematical Conference*, Singapore.
- H. Gunawan, G. Gunawan, Y. Soeharyadi, and Eridani (2006), "Generalized fractional integral operators and Olsen inequalities", *Preprint*.
- H. Gunawan, E. Kikianty, Mashadi, S. Gemawati, dan I. Sihwaningrum (2006), "Orthogonality in n -normed spaces", *Preprint*.
- H. Gunawan and Mashadi (2001), "On finite-dimensional 2-normed spaces", *Soochow J. Math.* 27, 321-329.
- H. Gunawan dan Mashadi (2001), "On n -normed spaces", *Int. J. Math. Math. Sci.* 27, 631-639.
- H. Gunawan, Mashadi, S. Gemawati, Nursupiamin, and I. Sihwaningrum (2006), "Orthogonality in 2-normed spaces revisited", *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 17, 76-83.
- H. Gunawan and O. Neswan (2005), "On angles between subspaces of inner product spaces", *J. Indones. Math. Soc.* 11, 129-135.
- H. Gunawan, O. Neswan, and W. Setya-Budhi (2005), "A formula for angles between subspaces of inner product spaces", *Beiträge Alg. Geom.* 46, 311-320.
- H. Gunawan dan W. Setya-Budhi (2004), "On the behavior of the solution of the wave equation", *Jurnal Matematika dan Sains* 9, 255-258.

- H. Gunawan, W. Setya-Budhi, Mashadi, S. Gemawati (2005), "On volumes of n -dimensional parallelepiped in l^p spaces", *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 16, 48-54.
- H. Gunawan and A. Sikora (2002), "On maximal operators associated to Laplace operators", *Research Report*.
- G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1927), "Some properties of fractional integrals. I", *Mat. Zeit.* 27, 565-606.
- G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1930), "A maximal theorem with function-theoretic applications", *Acta Mat.* 54, 81-116.
- K. Kurata, S. Nishigaki, and S. Sugano (1999), "Boundedness of integral operators on generalized Morrey spaces and its application to Schrödinger operators", *Proc. Amer. Math. Soc.* 128, 1125-1134.
- S. Kurepa (1966), "On the Buniakowsky-Cauchy-Schwarz inequality", *Glas. Mat. III Ser. 1*, 21, 147-158.
- A. Misiak (1989), " n -inner product spaces", *Math. Nachr.* 140, 299-319.
- E. Nakai (1994), "Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces", *Math. Nachr.* 166, 95-103.
- E. Nakai (2002), "On generalized fractional integrals", *Taiwan. J. Math.* 5, 587-602.
- E. Nakai (2002), "On generalized fractional integrals on the weak Orlicz spaces, $BMO\phi$, the Morrey spaces and the Campanato spaces", in *Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics (Lund, 2000)*, 389-401, de Gruyter, Berlin.
- P.J. Olsen (1995), "Fractional integration, Morrey spaces, and a Schrödinger operator", *Comm. Partial Diff. Equation* 20, 2005-2055.
- M.A. Pinsky (2002), *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, Brooks/Cole, Pacific Grove.

- I.B. Risteski and K.G. Trenčevski (2001), "Principal values and principal subspaces of two subspaces of vector spaces with inner product", *Beiträge Alg. Geom.* 42, 289-300.
- J.L. Rubio de Francia (1986), "Maximal functions and Fourier transforms", *Duke Math J.* 53, 395-404.
- W. Rudin (1973), *Functional Analysis*, Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi.
- A. Sikora and J. Wright (2001), "Imaginary powers of Laplace operators", *Proc. Amer. Math. Soc.* 129, 1745-1754.
- S.L. Sobolev (1938), "On a theorem in functional analysis", *Mat. Sob.* 46, 471-497.
- Society for Industrial and Applied Mathematics (1996), *SIAM Report on Mathematics in Industry*, Philadelphia.
- E.M. Stein (1970), *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton.
- E.M. Stein (1976), "Maximal functions: spherical means", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 73, 2174-2175.
- E.M. Stein (1993), *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- E.M. Stein and R. Shakarchi (2003), *Fourier Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- I. Stewart (1995), *Nature's Numbers*, A Phoenix Paperback.
- R.S. Strichartz (2000), *The Way of Analysis*, Jones & Bartlett Publishers, Sudbury, 2000.
- G. Weiss (1965), "Harmonic Analysis", *MAA Studies in Mathematics* (I.I Hirschman, Jr., Ed.), Prentice-Hall.
- N. Young (1988), *An Introduction to Hilbert Space Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

Curriculum Vitae

N a m a : **Hendra Gunawan**
Tempat & Tgl. Lahir : Bandung, 29 Des 1964
Nama Istri & Anak : Ir. Ita Ananta, MAppSc.
Rubio Gunawan
Viola Ananta
Alamat Kantor : FMIPA – ITB
Jl. Ganesa 10 Bandung



Riwayat Pendidikan

1988-1992 : *Ph.D.*, School of Mathematics, UNSW, Sydney
1982-1987 : *Sarjana*, Jurusan Matematika, ITB, Bandung

Riwayat Pekerjaan/Jabatan

2006- : Guru Besar pada FMIPA-ITB
2001-2006 : Lektor Kepala pada FMIPA-ITB
2000 : Lektor pada FMIPA-ITB
1997-2000 : Lektor Muda pada FMIPA ITB
1994-1997 : Asisten Ahli pada FMIPA-ITB
1992-1994 : Asisten Ahli Madya pada FMIPA-ITB
1989-1991 : Tutor pada School of Mathematics, UNSW, Sydney
1987 : Asisten pada Fakultas Teknik, Unpar

Penugasan di Lingkungan ITB

2006- : Anggota Majelis Guru Besar ITB
2006- : Anggota Satgas Akreditasi & Asesmen Internal SPM-ITB
2006- : Anggota Senat FMIPA-ITB
2006- : Anggota Komisi Program Pascasarjana FMIPA-ITB
2006- : Ketua Gugus Kendali Mutu FMIPA-ITB
2005- : Ketua KK Analisis dan Geometri, FMIPA-ITB

2005 : Sekretaris Majelis Departemen MA-ITB
2004-2005 : Anggota Majelis Departemen MA-ITB
2004-2005 : Anggota Komisi Program Pascasarjana MA-ITB
2004-2005 : Ketua KBK Analisis, Departemen MA-ITB
2002-2003 : Sekretaris Tim Kurikulum MA-ITB
1999 : Direktur Eksekutif Sub-Proyek QUE, Dept. MA-ITB
1995-1997 : Koordinator Kalkulus, TPB-ITB
1992-1995 : Pembina Kemahasiswaan, Jurusan MA-ITB

Penugasan di Tingkat Nasional

2006-2007 : Field Specialist PMS-TPSDP
2006 : Anggota Tim Adhoc Standar Proses BSNP
2006 : Ketua Tim Standar Kurikulum IndoMS
2005 : Anggota Tim Adhoc Standar Isi BSNP
2003-2006 : Editor-in-Chief Journal of the Indonesian Math. Soc.

Keanggotaan dalam Organisasi Profesi

1992- : Anggota Biasa Himpunan Matematika Indonesia
1992- : Anggota Biasa American Mathematical Society

Penghargaan dan Sejenisnya

2000 : Merdeka Fellowship dari DETYA/AEI, Australia
1999 : Dosen Terbaik dari Departemen Matematika-ITB
1998 : Travel Grant dari Int'l Mathematical Union untuk
menghadiri Int'l Congress of Mathematicians di Berlin
1998 : Scientific Publ. Award dari Proyek URGE, DIKTI
1995 : Finalis Lomba Peneliti Muda, LIPI
1994 : Travel Grant dari Int'l Mathematical Union untuk
menghadiri Int'l Congress of Mathematicians di Zürich

Rekapitulasi Publikasi

16 + 24 paper di jurnal nasional + internasional
8 + 12 presentasi di konferensi nasional + internasional
18 + 12 artikel di koran/majalah berbahasa Indonesia + Inggris