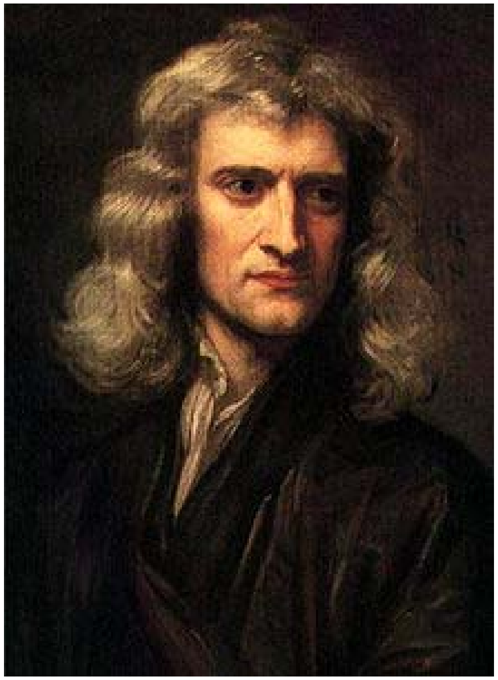
KALKULUS
BUKAN SEKEDAR KALKULASI

Hendra Gunawan

Kampus UNJ, 21 November 2015

MENGAPA KALKULUS?
APA YANG DIGARAP?

Isaac Newton (1643-1727) & Kecepatan Sesaat



http://en.wikipedia.org

Misalkan sebuah partikel bergerak sepanjang garis lurus sehingga posisinya pada saat t adalah x = x(t).

Kecepatan rata-rata-nya dari t = *a* s/d t = *b* adalah

v[*a*,b] = [x(*b*) – x(*a*)]/(*b* – *a*).

Kecepatan sesaat pada t = *a* adalah

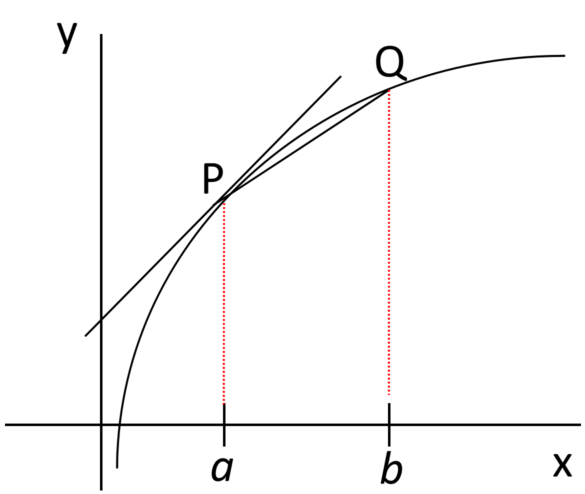
$$v(a) = \lim_{b \to a} \frac{x(b) - x(a)}{b - a}.$$

James Gregory (1638-1675)
Isaac Barrow (1630-1677)

Gottfried Leibniz (1646-1716) & Gradien Garis Singgung

Misal kita mempunyai fungsi $y = f(x)$ yang grafiknya cukup mulus di sekitar $x = a$, sehingga mempunyai garis singgung di titik $P(a,f(a))$.

http://www.123rf.com



Gradien garis yg melalui titik $P(a,f(a))$ dan $Q(b,f(b))$ adalah $m = [f(b) - f(a)] \div (b - a)$. Gradien **garis singgung** pada kurva $y = f(x)$ di $P(a,f(a))$ adalah

$$m_a = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Turunan & Teorema Nilai Rata-Rata

Turunan dari fungsi f di titik x = a didefinisikan sebagai

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Teorema Nilai Rata-Rata: Jika f kontinu pada interval [a,b] dan mempunyai turunan di setiap titik di dalam (a,b), maka

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

untuk suatu c ∊ (a,b).

Definisi Limit Fungsi di Suatu Titik

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika

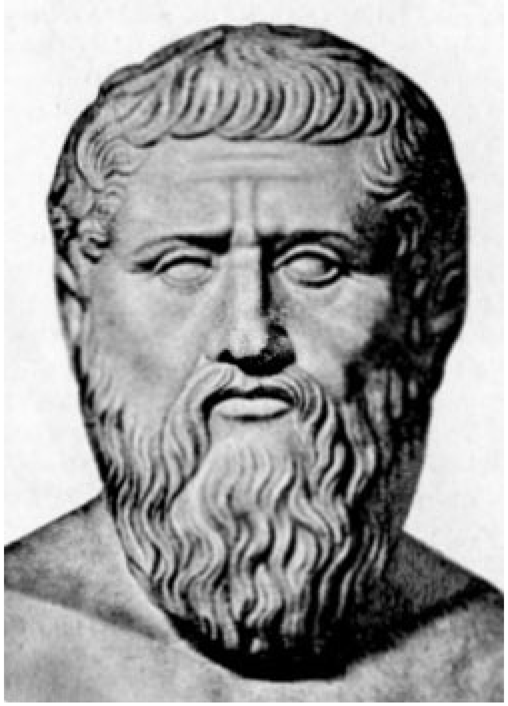
A-L. Cauchy (1789-1857)
K. Weierstrass (1815-1897)

"untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0 sehingga:
jika 0 < | x – c | < δ, maka | f(x) – L | < ε."

OMG, ini bukan suatu kalimat yang mudah!
Sejak kapan manusia berurusan dengan dunia *infinitesimal*?

Antiphon & Lingkaran

- Antiphon (425 SM) membuktikan bahwa luas segi-2^n beraturan "di dalam lingkaran" lebih besar dari ($1 - 2^{1-n}$) kali luas lingkaran.
- Karena luas segi-2^n beraturan sebanding dengan kuadrat "diameter"-nya, Antiphon lalu menyimpulkan bhw luas lingkaran juga mesti sebanding dgn kuadrat diameternya: $L = k(2r)^2 = 4kr^2$.

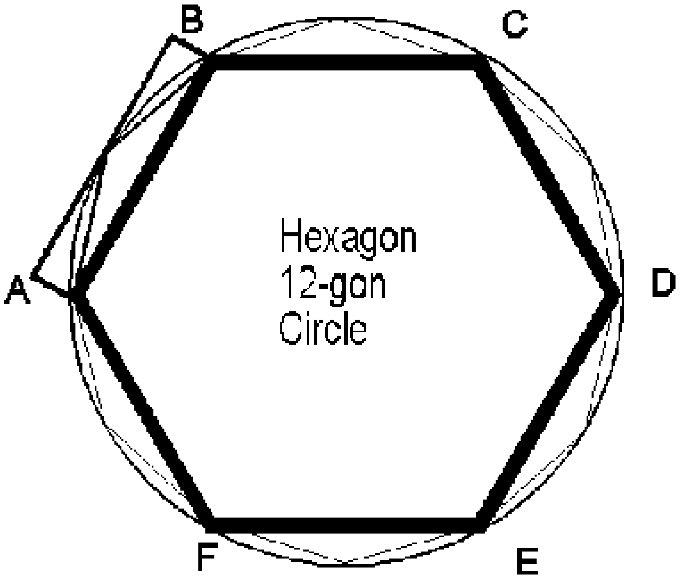


perseus.mpiwg-berlin.mpg.de

Eudoxus & Lingkaran

- Fakta bahwa luas lingkaran sebanding dengan kuadrat diameternya dibuktikan* secara *rigorous* oleh Eudoxus (~375 SM).

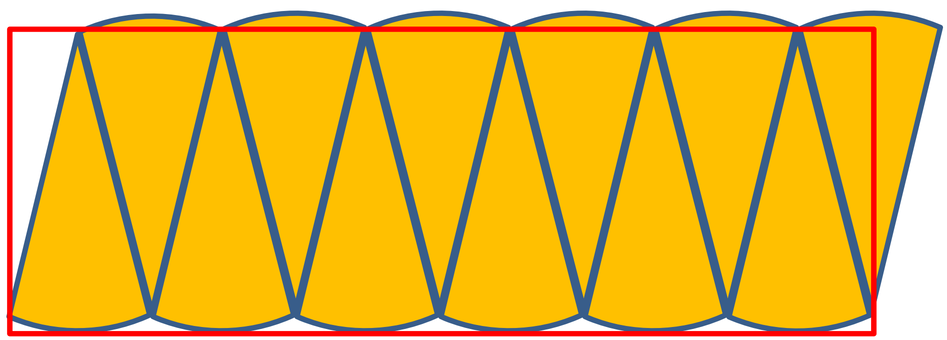
people.famouswhy.com



*Dalam pembuktiannya, Eudoxus juga menggunakan fakta bahwa luas segi-2^n beraturan “yang memuat lingkaran” lebih kecil dari $(1 + 2^{2-n})$ kali luas lingkaran tersebut, selain fakta yang telah dibuktikan o/ Antiphon.

Archimedes & Lingkaran

Archimedes (~287-212 SM) membuktikan bahwa luas lingkaran sama dengan ½ × keliling × jari-jari.

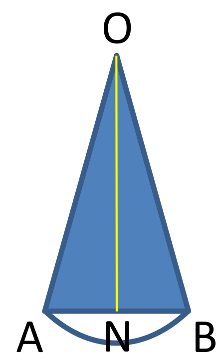


en.wikipedia.org

Archimedes & Lingkaran

Buktinya sbb: Andaikan luas lingkaran = $L > T$ = ½ × keliling × jari-jari. Pilih bil n sedemikian shg $T <$ luas segi-2^n $< L$. Misal AB sisi segi-2^n. Pada segitiga OAB, ruas garis ON tegak lurus thd AB. Di sini, $|ON| <$ jari-jari. Jadi,

$$\text{Luas segi-}2^n = 2^n \times (\tfrac{1}{2}|AB| \times |ON|)$$
$$= \tfrac{1}{2} \times (2^n|AB| \times |ON|)$$
$$< \tfrac{1}{2} \times \text{keliling} \times \text{jari-jari} = T.$$



Kontradiksi. Dgn cara yg sama, mustahil $L < T$. Jadi mestilah $L = T$.

Archimedes & Lingkaran

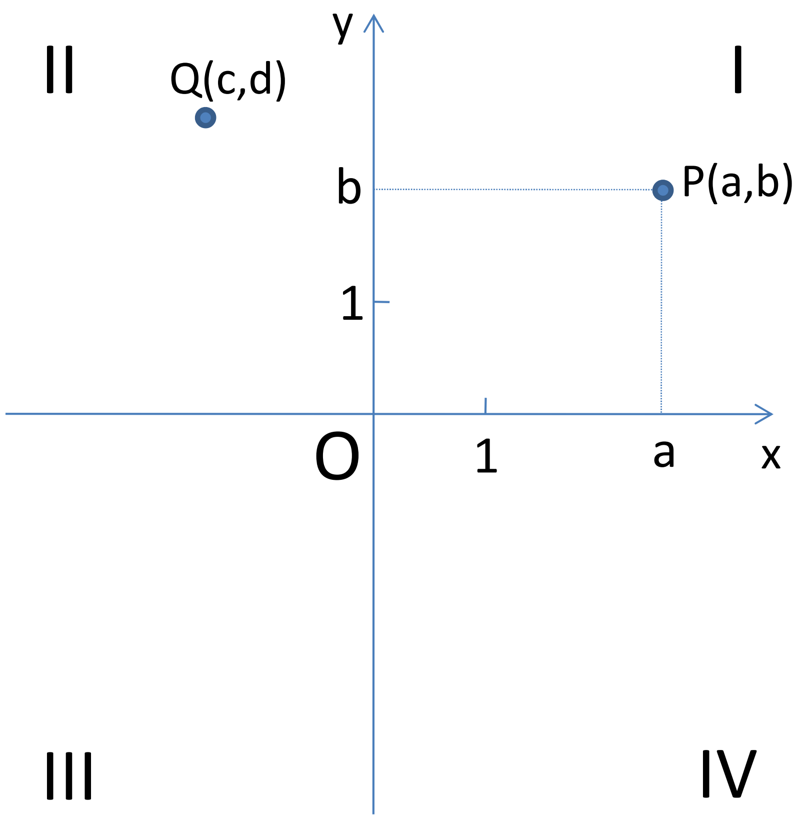
- Berdasarkan temuan sebelumnya, jika K = keliling lingkaran berdiameter 1, maka luas-nya sama dengan K/4.
- Sekarang misalkan L = luas lingkaran berjari-jari r. Maka, berdasarkan temuan Antiphon dan Eudoxus:

$$\frac{L}{K/4} = \frac{(2r)^2}{1^2}.$$

- Akibatnya, $L = Kr^2$. Lalu, dgn menggunakan segi-96, Archimedes memperoleh $K \approx 22/7$.

BAGAIMANA DENGAN BANGUN DATAR LAINNYA?

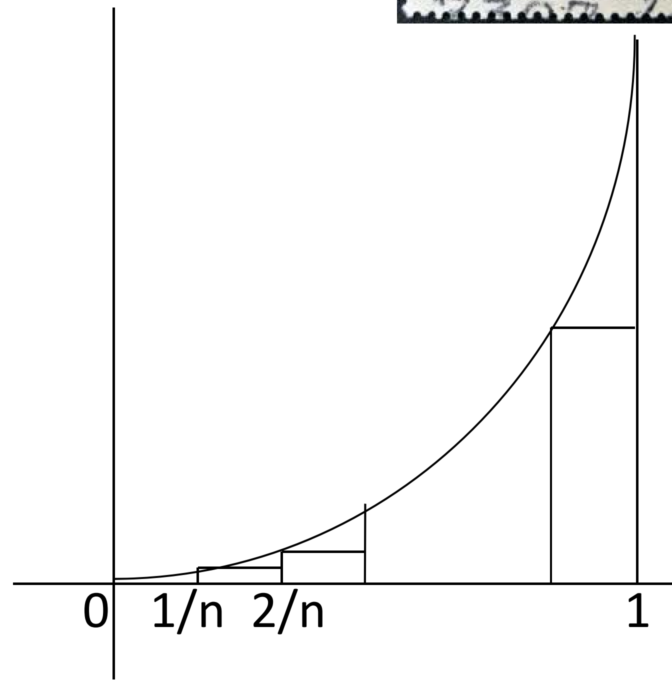
Sistem Koordinat Cartesius



Rene Descartes (1596-1650, Filsuf & Matematikawan Perancis, terkenal dengan karyanya "*La geometrie*" (1637) dan ucapan "*Cogito ergo sum*."

Luas Daerah di Bawah Kurva

Misalkan kita ingin menghitung luas daerah di bawah kurva $y = f(x) = x^2, \; 0 \le x \le 1$. Pertama, bagi selang $[0,1]$ atas n selang bagian yang sama panjangnya. Lalu, luas daerah tersebut (L) kita hampiri dgn jumlah luas n persegi-panjang di bawah kurva, yakni



$$L \approx \frac{1}{n}\left[0^2 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right].$$

Perhatikan bahwa deret di ruas kanan dapat kita tulis-ulang sebagai

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

yang jumlahnya

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

Jadi, kita kita peroleh hampiran

$$L \approx \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} := L_n.$$

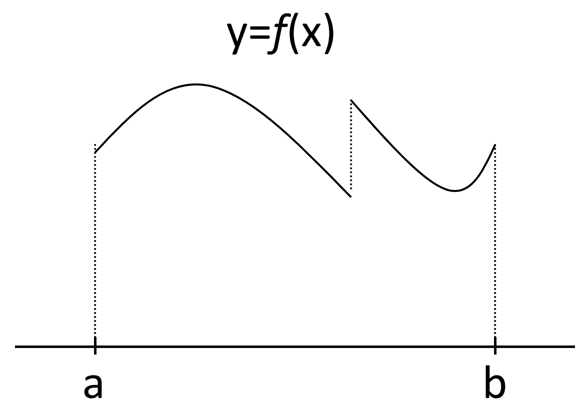
Dari sini kita peroleh $L_n \approx 1/3$ bila n cukup besar. Jadi, kita dapat menduga bahwa luas daerah yang sedang kita cari adalah 1/3. [Benarkah luasnya = 1/3 ??]

Jumlah Riemann

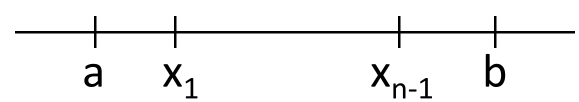

en.wikipedia.org

Misalkan $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik. Bagi selang $[a,b]$ atas n selang bagian (tak perlu sama panjang), dengan titik-titik pembagi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Himpunan titik-titik ini disebut sebagai **partisi** dari $[a,b]$. Untuk $i = 1, \dots, n$, tulis $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (= lebar selang bagian ke-i).



Jumlah Riemann

Pada setiap selang bagian, pilih **titik sampel** $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, sembarang. Lalu bentuk penjumlahan berikut

$$R_P := \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

dengan indeks *i* berjalan dari 1 hingga n.

Bentuk ini dikenal sebagai **jumlah Riemann** utk f terhadap partisi $P = \{a=x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n=b\}$ dan titik-titik sampel t_i.

Integral Riemann

Jumlah Riemann untuk *f* merupakan *hampiran* untuk luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Semakin 'halus' partisinya, semakin baik hampiran tersebut. Jika

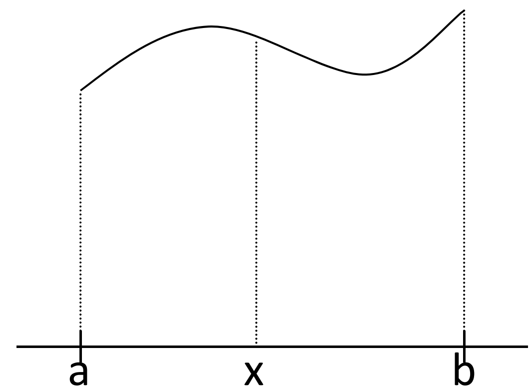
$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

ada, maka *f* dikatakan **terintegralkan** pada [a,b] dan **integral tentu** *f* pada [a,b] didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

<u>Catatan</u>. $|P| = \text{maks}\,\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$. Jika $\Delta x_i = (b-a)/n$ dan $n \to \infty$, maka $|P| \to 0$.

Fungsi Akumulasi



Misalkan *f* terintegralkan pada [*a*, *b*]. Definisikan

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Di sini, F(x) menyatakan "luas daerah" di bawah kurva y = *f*(t), *a* ≤ t ≤ x (lihat gambar).

Perhatikan bahwa F(*a*) = 0 dan $F(b) = \int_a^b f(t)dt.$

Fungsi F disebut **fungsi akumulasi** dari *f*.

Teorema Dasar Kalkulus I

Jika f kontinu di $x_0 \in (a,b)$, maka $F'(x_0) = f(x_0)$; yakni,

$$\left(\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt \right) \Bigg|_{x=x_0} = f(x_0).$$

Catatan:

1. TDK I menyatakan bahwa fungsi akumulasi merupakan anti-turunan dari *f*.
2. TDK I memberi tahu kita bahwa turunan dan integral merupakan semacam kebalikan satu terhadap yang lainnya.

Bukti Teorema Dasar Kalkulus I

Menurut definisi turunan,

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Ketika $h \approx 0$, f tak berubah banyak pada $[x_0, x_0+h]$. Pada selang ini, $f(t) \approx f(x_0)$, sehingga integral-nya kira-kira sama dengan $h.f(x_0)$. Jadi $F'(x_0) = f(x_0)$.

Teorema Dasar Kalkulus II

Jika f kontinu dan mempunyai anti-turunan F pada [a, b], maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Catatan:

1. Seperti halnya TDK I, TDK II mengaitkan integral tentu dengan anti-turunannya.
2. TDK II merupakan akibat dari TDK I, tetapi dapat dibuktikan pula dgn menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata untuk Turunan.

Bukti Teorema Dasar Kalkulus II

Misalkan *f* kontinu dan mempunyai anti-turunan *F* pada [*a*, *b*]. Maka, *f* terintegralkan pada [*a*, *b*], dan untuk setiap partisi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ kita mempunyai

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i,$$

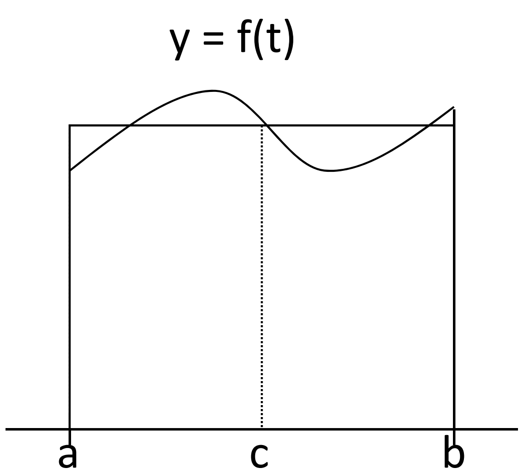
Teorema Nilai Rata-Rata Turunan

Karena itu $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i = F(b) - F(a).$

Teorema Nilai Rata-Rata Integral

Jika f kontinu pada [a, b], *maka ter-dapat* c ϵ [a,b] *sedemikian sehingga*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$



Catatan. Nilai *f*(c) dalam teorema ini disebut **nilai rata-rata integral** *f* pada [a, b] (lihat gambar). Per-hatikan bahwa luas daerah di ba-wah kurva y = *f*(t), t ϵ [a, b], sama dengan *f*(c)(b – a).

Nilai Rata-Rata Turunan & Nilai Rata-Rata Integral

Jika $F' = f$ kontinu pada [a,b], maka

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Keduanya sama dengan nilai $f(c)$ untuk suatu c di antara a dan b.

Kalkulus bukan sekedar kalkulasi, tetapi merupakan sebuah kerangka berpikir yang merajut dua konsep mendasar, yaitu turunan dan integral, dengan merangkul konsep infinitesimal ("*the ghosts of departed quantities*").

TERIMA KASIH.