MATEMATIKA DAN BUDAYA BERMATEMATIKA

Prof. Hendra Gunawan

Kuliah Inaugurasi

sebagai Anggota Akademi Ilmu Pengetahuan Indonesia

Institut Teknologi Bandung

Mei 2017

Daftar Isi

0. PENDAHULUAN

Bila dua orang matematikawan ditanya apa matematika itu, kemungkinan besar mereka akan memberikan jawaban yang mirip tetapi tidak persis sama, karena pengalaman mereka dalam bermatematika pasti berbeda. Di Wikipedia berbahasa Inggris [1], matematika 'didefinisikan' sebagai kajian tentang topik-topik seperti kuantitas (bilangan), struktur, ruang, dan perubahan. Dalam mempelajari topik-topik tersebut, matematikawan mencari pola dan menggunakannya untuk merumuskan dalil atau fakta-fakta yang menarik, dengan menyertakan pembuktian matematikanya.

Bagi sebagian orang, matematika dianggap bukan ilmu. Namun ini merupakan masalah semantik, apa yang dimaksud dengan ilmu itu sendiri. Matematika memang tidak berurusan (secara langsung) dengan benda atau objek fisis atau nyata, seperti halnya ilmu alam, melainkan dengan gagasan, yang pada awalnya mungkin terkait dengan benda atau objek fisis yang terdapat di alam. Matematikawan kemudian bercengkerama dengan gagasan tersebut, membuat definisi yang terkait dengan gagasan tersebut, mencari pola serta implikasinya, dan berupaya menemukan fakta-fakta menarik yang kadang tidak terduga pada awalnya. Berbeda dengan mereka yang menekuni ilmu alam, matematikawan tidak bergantung pada alat bantu atau instrumen (yang secara umum merupakan 'ekstensi' dari panca indera kita, seperti mikroskop, teleskop, atau termometer), tetapi mengandalkan pernalaran yang bertumpu pada logika --- karena yang dihadapinya adalah gagasan.

Sebagai contoh, sejak dahulu kala manusia telah akrab dengan benda-benda langit, khususnya Matahari dan Bulan, yang bentuknya bulat bundar. Dalam kehidupan sehari-hari, manusia membuat sumur yang tepinya bundar, atau membuat roda yang bundar. Manusia akrab dengan benda-benda bundar. Matematikawan kemudian mendefinisikan *lingkaran*, suatu gagasan yang melekat pada benda atau objek fisis yang bundar, kemudian bercengkerama dengan lingkaran itu, tidak dengan sumur atau rodanya (apalagi dengan Matahari atau Bulan yang berada jauh di langit). Maka diperolehlah rumus luas daerah lingkaran, yang menyatakan hubungan antara luas dan jari-jari lingkaran, walau rumus tersebut mengandung sebuah bilangan π yang nilainya tidak dapat ditentukan secara eksak. Perumusan definisi merupakan bagian yang krusial dalam bermatematika di tahap awal. Dengan definisi yang tepat, fakta-fakta lainnya diperoleh sebagai konsekuensi logis dari definisi tersebut.

Seperti halnya ilmu alam, matematika juga berurusan dengan fakta-fakta yang diterima sebagai kebenaran (*truth*). Bedanya, matematikawan tidak menerima kebenaran itu melalui eksperimen di laboratorium atau pengamatan terhadap objek yang dikajinya, yang secara umum memang belum tentu ada secara fisis, tetapi melalui suatu pembuktian yang bertumpu pada logika matematika dan sejumlah aksioma yang ditetapkan dan dalil yang telah dibuktikan sebelumnya. Dalam buku *Experiencing Mathematics* [2], Reuben Hersh 'mendefinisikan' matematika sebagai ilmu yang terdiri dari fakta-fakta yang diterima kebenaran-nya, tetapi objek yang dipelajarinya bukan merupakan sesuatu yang dapat dipegang, dilihat, atau empiris. Objek yang dipelajarinya merupakan gagasan atau konsep, yang ada dan dapat dibayangkan oleh pikiran manusia.

Saya, dan beberapa kolega, menganalogikan apa yang dipelajari dalam matematika dengan 'hantu', sesuatu yang gaib. Matematikawan ibarat orang yang dapat melihat 'hantu' tersebut, bahkan bercengkerama dengannya, sehingga bisa menjelaskan sifat-sifat 'hantu' tersebut dengan rinci. Bedanya dengan sosok hantu (tanpa tanda kutip) yang ditakuti oleh kebanyakan manusia, entah sesungguhnya ada atau tidak, adalah sebagai berikut: dua orang yang mengaku bisa melihat hantu belum tentu sepakat tentang sosok hantu tersebut, sementara dua matematikawan yang menekuni suatu 'hantu' yang sama (misalnya lingkaran) dapat sepakat dan berkomunikasi dengan baik dan lancar tentang 'hantu' tersebut, kecuali tentang hal-hal yang kebenarannya belum diketahui. Sebagian 'hantu' matematika telah dikenal secara luas oleh masyarakat awam, misalnya sekarang kita bisa berbicara tentang rumus luas daerah lingkaran tanpa perdebatan, kecuali tentang nilai eksak bilangan π itu.

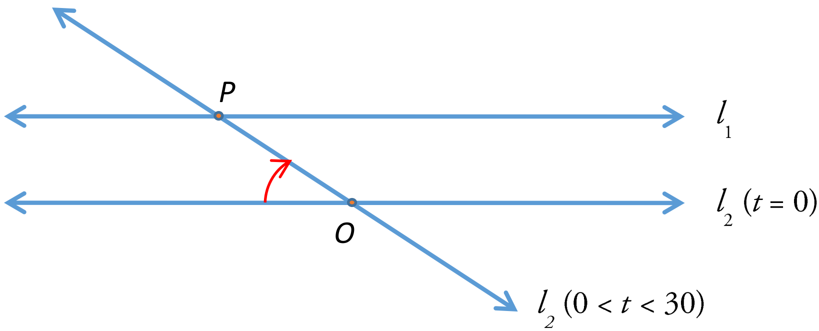
Dalam tulisan ini, saya akan memberikan gambaran lebih jauh tentang apa yang dilakukan oleh para matematikawan, melalui beberapa contoh klasik dan pengalaman saya sendiri dalam bermatematika. Pada bagian akhir dari tulisan ini, saya akan mengetengahkan salah satu topik matematika yang pernah saya kerjakan, terkait dengan konsep sudut antara dua subruang, dan aplikasinya oleh peneliti lain.

1. SEMUA ADALAH BILANGAN

Pada pertengahan tahun 2015, seorang anak bertanya: bilangan terakhir itu berapa? Ia mungkin sudah belajar mencacah: 1, 2, 3, dan seterusnya. Bila ia mencacah terus, apakah ia akan sampai pada bilangan terbesar? Apakah 100.000.000.000 (baca: seratus miliar) merupakan bilangan terakhir atau terbesar? Jawabannya tentu saja bukan, karena setelah bilangan tersebut ada 100.000.000.001 (baca: seratus miliar satu), yang lebih besar daripada 100.000.000.000. Berapapun bilangan yang telah kita cacah, selalu ada bilangan yang lebih besar. Jadi, bilangan terakhir atau terbesar itu tidak ada. Bila sebagian orang kemudian mengganggap bahwa bilangan terakhir adalah ∞ (baca: tak terhingga), maka pertanyaannya adalah: kapan kita sampai ke sana?

Konsep bilangan merupakan sebuah konsep matematika yang paling mendasar. Sejak kecil kita telah berkenalan dengan *bilangan asli* 1, 2, 3, dan seterusnya, yang sering dipakai untuk menyatakan banyak benda. Selanjutnya ada *bilangan bulat*, bilangan pecahan atau *bilangan rasional*, yang dapat dipakai untuk keperluan lainnya. Di zaman Yunani Kuno, Pythagoras bahkan percaya bahwa "*Semua adalah Bilangan*", yakni bahwa semua objek di alam semesta ini dapat dikuantifikasi sebagai bilangan. Yang dimaksud dengan bilangan oleh Pythagoras adalah bilangan rasional, karena pada saat itu mereka belum mengenal *bilangan irasional*. Namun, belakangan, mereka menyadari bahwa ada yang tak dapat dinyatakan oleh bilangan rasional, misalnya panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku dengan panjang alas dan tinggi sama dengan 1 satuan panjang. Bilangan irasional seperti $\sqrt{2}$ dan π telah membuat matematikawan Yunani Kuno penasaran, dan mewariskan sebuah pertanyaan yang baru terjawab dua ribu tahun kemudian oleh para matematikawan Eropa. Jangan salah, perkara bilangan ini nantinya memicu banyak konsep lainnya, termasuk konsep *ketakterhinggaan* (lihat [3]).

Pertanyaan seputar ketakterhinggaan telah membuat para matematikawan Yunani Kuno berdebat. Menurut Aristoteles, yang tidak menerima ketak-terhinggaan, semua di alam semesta ini terhingga. Ya, kita dapat mempunyai bilangan asli yang sangat besar, katakan 100.000.000 (seratus juta), atau bahkan 10.000.000.000.000 (sepuluh triliun), namun bilangan-bilangan tersebut tetap merupakan bilangan terhingga. Jika *n* adalah suatu bilangan asli (yang terhingga), maka kita selalu dapat menemukan bilangan asli yang lebih besar daripada n, misalnya $n + 1$, $2n$, atau n^3, tetapi semua bilangan ini masih tetap merupakan bilangan terhingga juga. Menurut Aristoteles, bilangan asli n dapat bernilai sebesar-besarnya, tetapi ia takkan pernah sama dengan ∞. Aristoteles juga berpendapat bahwa setiap garis mesti mempunyai panjang yang terhingga. Menurut Aristoteles, keberadaan garis dengan panjang tak terhingga akan memunculkan suatu kontradiksi dalam kinematika. Persisnya, ia melukis dua garis sejajar, sebutlah l_1 dan l_2. Misalkan garis l_2 berputar di titik O dengan kecepatan 1 putaran per jam, searah dengan arah jarum jam. Bila garis l_2 mulai berputar pada pukul 12.00, maka ia akan kembali sejajar pada pukul 12.30, 13.00, 13.30, 14.00, dan seterusnya. Pada waktu lainnya, garis l_2 akan memotong garis l_1, katakanlah di titik P, yang bergerak sepanjang garis l_1 seiring dengan berjalannya waktu (lihat gambar). Bagi Aristoteles, mustahil ada sesuatu yang dapat menempuh jarak tak terhingga dalam waktu yang terhingga! Karena itu, lanjut Aristoteles, 'ketakterhinggaan aktual' itu tidak ada, yang ada hanyalah 'ketakterhinggaan potensial' --- dalam pengertian bahwa kita dapat mempunyai ruas garis yang sangat panjang atau bilangan yang sangat besar, sebesar yang kita kehendaki, tetapi tetap terhingga.



Gambar 1. Titik bergerak pada garis

Serupa dengan itu, ada pertanyaan yang mengusik terkait dengan bilangan positif terkecil. Bila kita bagi 1 dengan 2, kita peroleh 1/2. Bila kita bagi dua lagi bilangan ini, kita peroleh 1/4, dan seterusnya kita peroleh $1/2^n$, dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$. Apakah pada suatu saat kita akan mendapatkan 0? Jawabannya tidak. Pada langkah ke berapapun, kita akan mendapatkan bilangan positif. Sekalipun bilangan itu sangat kecil, ia tidak akan sama dengan 0. Terkait dengan hal ini, matematikawan Yunani Kuno bernama Zeno mengemukakan suatu paradoks. Pada suatu waktu, Achilles (petarung fiktif Yunani Kuno) berlomba lari dengan seekor kura-kura. Karena kura-kura jauuuuh lebih lambat dari Achilles, ia memulai berlari 1 km di depan Achilles dan menggunakan sepatu roda (yang dirancang khusus untuknya, katakanlah begitu), dan Achilles berlari santai dengan kecepatan 2 kali kecepatan sang kura-kura. Siapa yang akan menang dalam lomba lari ini? Menurut Zeno, Achilles takkan pernah bisa menyalip sang kura-kura. sehingga kura-kura lah yang menang. Begini argumen Zeno: ketika Achilles telah berlari sejauh 1 km dan sampai di posisi awal sang kura-kura, sang kura-kura telah berlari sejauh ½ km dan berada ½ km di depan Achilles. Kemudian, ketika Achilles telah berlari sejauh 1 + ½ km, sang kura-kura berada ¼ km di depannya. Berikutnya, pada saat Achilles menempuh 1 + ½ + ¼ km, sang kura-kura berada 1/8 km di depannya. Demikian seterusnya, ketika Achilles telah berlari sejauh $1 + ½ + ¼ + ... + 1/2^n$ km, sang kura-kura berada $1/2^{n+1}$ km di depannya. Karena itu, menurut Zeno, Achilles takkan pernah berhasil menyusul sang kura-kura. Melalui paradoks ini, Zeno menyampaikan pesan bahwa ia menolak konsep ketak-terhinggaan. Baginya, *deret* $1 + ½ + ¼ + ... + 1/2^n$ takkan pernah sama dengan 2, karena berapa pun n jumlah deret ini akan selalu lebih kecil daripada 2.

Penolakan Zeno dan Aristoteles terhadap ketakterhinggaan dapat dimengerti karena mereka pada saat itu belum mengenal konsep *limit*, termasuk konsep ketakterhinggaan itu sendiri. Kelak, dengan sejumlah konsep yang dikembangkan di abad ke-

18 hingga abad ke-20, semuanya menjadi jelas. Namun, sebelum mengulas hal ini lebih jauh, mari kita tengok *keterhinggaan* yang ada di sekitar kita. Berikut adalah beberapa contoh bilangan besar yang menyatakan ukuran objek fisis yang kita kenal.

- $2{,}998 \times 10^{8}$, menyatakan kecepatan cahaya (dalam meter per detik) di ruang hampa.
- 1×10^{14}, menyatakan banyak sel dalam tubuh manusia.
- $1{,}41 \times 10^{17}$, menyatakan waktu paruh (dalam detik) dari zat radioaktif Uranium.
- $9{,}2 \times 10^{26}$, menyatakan diameter (dalam meter) alam semesta yang dapat dilihat.
- $5{,}1 \times 10^{96}$, menyatakan densitas Planck atau densitas alam semesta (dalam kilogram per meter kubik) pada waktu Planck setelah Big Bang.

Selain bilangan-bilangan besar, kita juga mengetahui bilangan-bilangan positif sangat kecil yang menyatakan ukuran dari objek fisis tertentu, antara lain:

- 1×10^{-12}, menyatakan massa rata-rata (dalam kilogram) sebuah sel manusia.
- $9{,}11 \times 10^{-31}$, menyatakan massa (dalam kilogram) sebuah elektron yang diam atau stasioner.

- $1{,}616 \times 10^{-35}$, menyatakan panjang tali (*string*) terpendek (dalam meter), yang dikenal sebagai panjang Planck.
- $5{,}4 \times 10^{-44}$, menyatakan selang waktu terpendek (dalam detik) yang bermakna, yang dikenal sebagai waktu Planck. Alam semesta dapat diukur atau dipelajari mulai dari waktu ini (yakni, $5{,}4 \times {}^{10\text{-}44}$ detik setelah Big Bang, bukan sejak $t = 0$).

Ya, bila kita berbicara tentang objek fisis di alam semesta ini, tampaknya semua memang terhingga. Namun, dalam matematika, bilangan positif 'terkecil' (yang terkait dengan objek fisis di alam) itu masih dapat kita bagi dua, dan bilangan 'terbesar' itu pun dapat kita kuadratkan. Alam matematika lebih luas dari alam fisis. Alam matematika merupakan alam gaib. Objek yang dipelajarinya adalah gagasan, bukan objek fisis. Sebagai contoh, bilangan adalah sebuah gagasan. Barangkali tidak ada objek fisis yang ukurannya lebih besar daripada 10^{1000} (entah apa satuannya), namun bilangan sebesar itu ada, diperlukan, dan merupakan bagian penting dalam kajian matematika. Demikian juga tidak ada objek fisis yang ukurannya lebih kecil daripada 10^{-1000} (entah apa satuannya), namun --- sebagai gagasan --- bilangan sekecil itu ada, diperlukan, dan merupakan bagian penting dalam kajian matematika.

2. MENAKSIR √2 DAN Π

Archytas, salah seorang cucu murid Pythagoras, telah mengetahui dari para pendahulunya bahwa tidak ada bilangan rasional r yang memenuhi persamaan $r^2 = 2$. Andaikan ada $r = p/q$, dengan p dan q bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor sekutu kecuali 1, sedemikian sehingga $r^2 = 2$. Maka, $p^2 = 2q^2$, merupakan bilangan genap, sehingga p juga mestilah genap, katakan $p = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Karena itu, q mestilah ganjil (karena p dan q tidak mempunyai faktor sekutu selain 1). Namun, di sisi lain, $4k^2 = 2q^2$, berakibat $q^2 = 2k^2$, yang mengharuskan q genap. Jadi q ganjil dan sekaligus genap, sesuatu yang mustahil. Ini membuktikan bahwa tidak ada bilangan rasional r sedemikian sehingga $r^2 = 2$. Dalam matematika, pembuktian ini dikenal sebagai pembuktian dengan kontradiksi. Sekarang kita mengenal bilangan tersebut sebagai √2 (baca: akar dua). Apa yang membuat Archytas penasaran adalah berapa nilai √2 itu.

Archytas mengembangkan suatu metode untuk menaksir nilai $\sqrt{m}$ sembarang secara iteratif. Metode ini memuat rangkaian langkah yang kemudian dikenal sebagai *Algoritma Euclid* (karena pertama kali dibaca dalam buku *Elements* karangan Euclid). Persisnya, misalkan X_1 adalah suatu *bilangan real* (yakni, X_1 bisa merupakan bilangan rasional maupun irasional). Bentuk *barisan* bilangan X_2, X_3, X_4, … dengan

$$X_{n+1} = \frac{1}{X_n - [X_n]},$$

untuk n = 1, 2, 3, ..., dengan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil daripada atau sama dengan x. Kemudian, bentuk pula barisan bilangan P_1, P_2, P_3, … dan Q_1, Q_2, Q_3, …, dengan

$$P_1 = [X_1],$$

$$P_2 = [X_2]\cdot P_1 + 1,$$

$$P_3 = [X_3]\cdot P_2 + P_1,$$

dan seterusnya, dan

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = [X_2],$$

$$Q_3 = [X_3]\cdot Q_2 + Q_1,$$

dan seterusnya.

Jika X_1 bilangan rasional, katakanlah $X_1 = P/Q$, maka untuk suatu bilangan asli n nilai X_n akan sama dengan suatu bilangan bulat, sehingga $X_n - [X_n] = 0$. Dalam hal ini, barisan akan terhenti pada langkah ke-n, dan P_n/Q_n merupakan bentuk *pecahan sederhana* dari P/Q. Sebagai contoh, jika $X_1 = 10/6$, maka $[X_1] = 1$. Kemudian,

$$X_2 = \frac{1}{\frac{10}{6}-1} = \frac{6}{4}, \text{ sehingga } [X_2] = 1.$$

Selanjutnya,

$$X_3 = \frac{1}{\frac{6}{4}-1} = 2, \text{ sehingga } [X_3] = 2.$$

Karena $X_3 - [X_3] = 0$, barisan terhenti pada langkah ke-3. Sekarang kita hitung

$$P_1 = [X_1] = 1,$$

$$P_2 = [X_2] \cdot P_1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2,$$

$$P_3 = [X_3] \cdot P_2 + P_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$

dan

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = [X_2] = 1,$$

$$Q_3 = [X_3] \cdot Q_2 + Q_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

Dalam hal ini kita peroleh $P_3/Q_3 = 5/3$, yang merupakan bentuk pecahan sederhana dari pecahan semula, yaitu 10/6.

Jika X_1 bilangan irasional, maka proses iterasi akan berlanjut terus. Bila kita hentikan iterasi pada langkah ke-n, maka P_n/Q_n merupakan suatu taksiran atau hampiran untuk X_1. Sebagai contoh, misal $X_1 = \sqrt{2}$. Maka, $[X_1] = 1$ dan dapat dihitung bahwa

$$X_2 = 1 + \sqrt{2}, \text{ sehingga } [X_2] = 2.$$

Selanjutnya, $X_2 - [X_2] = \sqrt{2} - 1 = X_1 - [X_1]$. Akibatnya,

$$X_n = 1 + \sqrt{2}, \text{ sehingga } [X_n] = 2,$$

untuk $n = 2, 3, 4, 5$, dan seterusnya. Di sini, iterasi tidak akan berhenti. Namun kita dapat menaksir nilai $\sqrt{2}$ seteliti yang kita inginkan. Sebagai contoh, dengan Algoritma Euclid hingga iterasi ke-5, kita peroleh $P_5/Q_5 = 41/29$ sebagai hampiran untuk $\sqrt{2}$.

Serupa dengan itu, dengan Algoritma Euclid hingga iterasi ke-9, kita peroleh hampiran $\sqrt{3} \approx 265/153$. Nilai hampiran ini kelak dipakai oleh Archimedes untuk menaksir nilai $\pi \approx 22/7$, sebagaimana telah diulas dengan cukup rinci dalam buku *Lingkaran* [4].

Archimedes dikenal sebagai ilmuwan dan insinyur hebat di abad ke-3 SM. Dalam Matematika, kontribusi Archimedes tercatat mulai dari pemecahan masalah dengan menggunakan apa yang kita kenal sekarang sebagai *Kalkulus*, hingga *Teori Bilangan*.

Salah satu masalah yang ia geluti dalam Teori Bilangan baru terpecahkan di tahun 1965. Dalam *Geometri*, nama Archimedes melekat pada rumus luas lingkaran. Persisnya, Archimedes membuktikan bahwa luas lingkaran sama dengan setengah keliling kali jari-jarinya. Jika π menyatakan rasio keliling terhadap diameter lingkaran (yang akan ditaksir nilainya oleh Archimedes), maka luas lingkaran sama dengan π kali jari-jari kuadrat. (Pada waktu itu, Archimedes tidak menggunakan lambang bilangan π. Lambang ini baru dipakai oleh seorang matematikawan asal Wales bernama William Jones pada tahun 1706.)

Bagaimana Archimedes membuktikan rumus luas lingkaran tersebut? Dengan memotong lingkaran menjadi sejumlah bagian, dan menyusun potongan-potongan lingkaran tersebut seperti pada gambar di bawah ini, tampak bahwa luas lingkaran kira-kira akan sama dengan setengah keliling kali jari-jarinya.

Gambar 2. Menghampiri luas lingkaran

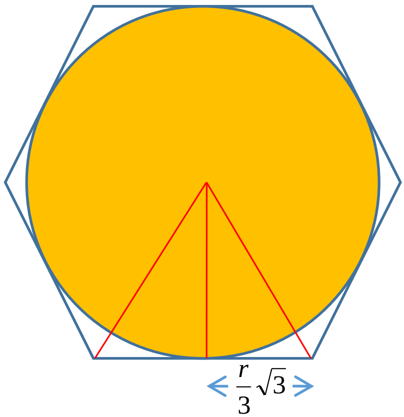
Dengan argumentasi yang ketat, Archimedes berhasil membuktikan bahwa luas lingkaran memang persis sama dengan setengah keliling kali jari-jarinya. Berdasarkan temuan ini, kita dapatkan bahwa luas lingkaran berdiameter 1 sama dengan $K/4$, dengan K menyatakan keliling lingkaran berdiameter 1.

Selanjutnya, misal L menyatakan luas lingkaran berjari-jari r. Maka, berdasarkan temuan matematikawan lainnya dari Yunani Kuno, yaitu Antiphon dan Eudoxus, yang menyatakan bahwa luas lingkaran sebanding dengan kuadrat dari diameternya, kita mempunyai

$$\frac{L}{K/4} = \frac{(2r)^2}{1^2}.$$

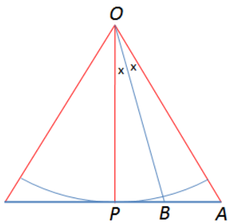
Akibatnya, kita peroleh $L = Kr^2$. Masalahnya adalah, berapa nilai K tersebut? Ingat bahwa K sama dengan keliling lingkaran berdiameter 1, yaitu bilangan π.

Archimedes pun penasaran ingin mengetahui berapa nilai π yang merupakan perbandingan keliling lingkaran dan diameternya itu. Dengan menggunakan segi-96 beraturan 'yang memuat lingkaran', Archimedes memperoleh taksiran $\pi < \frac{22}{7}$. Langkah-langkah yang dilakukannya untuk memperoleh taksiran ini adalah sebagai berikut. Ia memulai dengan segi 6 beraturan yang memuat lingkaran berjari-jari *r* sembarang. Archimedes mendapatkan bahwa π < 2√3 ≈ 530/153 (ingat bagaimana menghampiri nilai √3 dengan Algoritma Euclid).



Gambar 3. Menghampiri bilangan π

Selanjutnya, Archimedes membagi dua sudut di titik puncak segitiga (yang berimpit dengan titik pusat lingkaran) pada segi enam beraturan tadi, dan menaksir keliling lingkaran dengan keliling segi-12 beraturan yang memuat lingkaran. Dengan menggunakan sifat kesebangunan dua segitiga dan perhitungan perbandingan panjang sisi-sisi segitiga yang terlibat dengan teliti (lihat Gambar 4), Archimedes mendapatkan taksiran yang lebih baik, yaitu π < 12 × 153/571 = 1836/571.



$OA : OP = AB : BP$
$OP : AP = \sqrt{3} > 265/153$
$OA : AP = 2 = 306/153$
$(AB + BP) : BP = (OA + OP) : OP$
$AP : BP = (OA + OP) : OP$
$OP : BP = (OA + OP) : AP$
$OP : BP > 571/153$
$BP < 153/571 \times OP$

Gambar 4. Memperbaiki hampiran bilangan π

Ia kemudian membagi dua lagi sudut di titik puncak segi-12 beraturan untuk memperoleh segi-24 beraturan dan, dengan perhitungan yang semakin rumit, ia mendapatkan taksiran berikutnya untuk π, yaitu $\pi < 24 \times 153/1162{,}125$. Perhatikan bahwa Archimedes tidak ingin mengabaikan nilai 0,125 yang sama dengan 1/8 itu dalam perhitungannya guna mendapatkan taksiran yang teliti untuk π. Langkah yang serupa dilakukan lagi oleh Archimedes, sehingga ia memperoleh taksiran untuk π melalui segi-48 beraturan, yaitu $\pi < 48 \times 153/2334{,}25$. Akhirnya, melalui segi-96 beraturan, ia mendapatkan taksiran yang lebih baik dan sederhana: $\pi < 96 \times 153/4673{,}5 = 22/7$. *Eureka*!

Apakah Archimedes berhenti sampai di sini? Tidak, ia masih melanjutkan menaksir nilai π ‘dari sebelah kiri’, dengan menggunakan segi-96 beraturan ‘di dalam lingkaran’ dan memperoleh taksiran $\pi > 223/71$. Dengan hasil ini, Archimedes menyimpulkan bahwa $223/71 < \pi < 22/7$. Bila kita kemudian menganggap $\pi \approx 22/7$, maka galat dalam penaksiran ini tentunya takkan lebih daripada $22/7 - 223/71 \approx 0{,}002$. [Archimedes menuliskan semua hitung-hitungan di atas dalam sebuah artikel berjudul *Pengukuran pada Lingkaran*.]

Apa yang telah dilakukan oleh Archytas dan Archimedes merupakan contoh kegiatan bermatematika yang diawali oleh rasa penasaran terkait bilangan irasional yang tak mereka kenal. Sebaliknya, apa yang dipelajari di sekolah, seperti menghitung luas segitiga (diketahui alas dan tingginya), atau menghitung luas lingkaran (diketahui jari-jari atau diameternya) bukan merupakan kegiatan bermatematika yang tinggi nilainya. Apakah Archimedes akan menghitung luas penampang sumur-nya yang bundar setelah menemukan taksiran nilai π itu? Saya kira tidak. Ia mungkin akan memberikan rumusnya kepada para tukang. Apa yang menarik baginya kemudian adalah mencari keterkaitan antara volume bola dan jari-jarinya, yang hasilnya ia tuliskan dalam artikel berjudul *Bola dan Silinder*. [Bila kita pernah menggunakan rumus volume bola berjari-jari r, yaitu $V = (4/3)\pi r^3$, kita mesti berterima kasih kepada penemunya, yaitu Archimedes.]

3. DEFINISI DAN IMPLIKASINYA

Dalam matematika, definisi merupakan bagian penting, yang menjadi pijakan dalam pernalaran yang dilakukan oleh matematikawan. Dalam kalimat "tidak ada bilangan rasional r yang memenuhi persamaan $r^2 = 2$," terdapat setidaknya dua kata atau frasa yang merupakan definisi matematika, yaitu *bilangan rasional* dan *persamaan*. Selain itu ada lambang kuadrat dan tanda sama dengan pada persamaan $r^2 = 2$. Definisi dalam matematika merupakan kesepakatan tentang arti suatu kata, frasa, atau lambang. Tanpa memahami arti kata atau frasa serta lambang tersebut, kalimat di atas hanya akan menjadi kalimat asing yang tak jelas maknanya.

Definisi tidak dibuat sembarangan oleh para matematikawan. Sebuah definisi diusulkan karena ia muncul berulang-kali. Sebagai contoh, ketika berurusan dengan *bilangan bulat*, ada bilangan yang habis dibagi dua dan yang tidak habis dibagi dua. Supaya tidak menulis frasa “bilangan yang habis dibagi dua” dan “bilangan yang tidak habis dibagi dua” berulang-kali, matematikawan mendefinisikan *bilangan genap* dan *bilangan ganjil*. Demikian pula halnya dengan bilangan yang merupakan *rasio* atau hasil bagi antara dua bilangan bulat, dengan penyebut bukan nol, yang kemudian dinamai sebagai bilangan rasional.

Kegamangan Zeno dan Archimedes dengan ketakterhinggaan disebabkan antara lain karena pada saat itu mereka belum mengenal *deret tak terhingga* dan *limit tak terhingga* (dari suatu *fungsi* di suatu titik). Walau Aristoteles mengembangkan dasar-dasar logika, pada saat itu ia belum mengenal konsep *himpunan*. Andai ia memandang bilangan-bilangan asli yang terhingga itu sebagai suatu himpunan dan bertanya berapa banyak anggota himpunan itu, maka ia akan menyadari bahwa ketakterhinggaan itu ada di depan matanya. Namun, untuk sampai pada kesimpulan ini, konsep *kardinalitas* himpunan perlu dibangun terlebih dahulu. Dan hal ini baru dilakukan oleh Georg Cantor pada abad ke-19. Untuk himpunan terhingga, kardinalitas himpunan menyatakan banyak anggota himpunan tersebut. Sebagai contoh, kardinalitas himpunan huruf hidup {a, i, u, e, o} sama dengan 5. Himpunan semua bilangan asli bukan merupakan himpunan terhingga. Kardinalitas himpunan semua bilangan asli dilambangkan dengan $\aleph_0$ (baca: aleph nol).

Dengan konsep pemetaan satu-ke-satu, himpunan semua bilangan bulat dan himpunan semua bilangan rasional juga memiliki kardinalitas yang sama dengan himpunan semua bilangan asli, walaupun kedua himpunan tersebut 'lebih besar' daripada himpunan semua bilangan asli. Untuk himpunan tak terhingga, himpunan yang 'lebih besar' ternyata tidak otomatis mempunyai anggota 'lebih banyak'. Sekalipun himpunan semua bilangan bulat memuat atau 'lebih besar' daripada himpunan semua bilangan asli, terdapat *pemetaan satu-ke-satu* di antara kedua himpunan tersebut, sehingga dapat disimpulkan bahwa kardinalitas kedua himpunan tersebut sama, yaitu $\aleph_0$. Bilangan bulat tidak lebih banyak daripada bilangan asli!

Lalu apakah semua himpunan yang tak terhingga mempunyai kardinalitas $\aleph_0$? Jawabannya adalah tidak. Cantor menemukan bahwa himpunan semua bilangan real mempunyai anggota jauh lebih banyak daripada himpunan semua bilangan asli (namun, mohon maaf, penjelasannya tidak diberikan dalam tulisan ini karena terlalu teknis). Kardinalitas himpunan semua bilangan real dilambangkan dengan $\mathfrak{c}$ (baca: kontinum) atau $2^{\aleph_0}$, yang dapat dibuktikan lebih besar daripada $\aleph_0$. Dengan *Hipotesis Kontinum*, kardinalitas himpunan bilangan real kemudian dianggap sama dengan $\aleph_1$ (baca: aleph satu). Selanjutnya, kita dapat mengkonstruksi himpunan yang memiliki kardinalitas $\aleph_2$,

$\aleph_3$, $\aleph_4$, dan seterusnya, dengan $\aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \aleph_4 < \ldots$. Ketak-terhinggaan itu ternyata tidak hanya ada tetapi 'bertingkat-tingkat'. Temuan Cantor ini sempat membuat geger para matematikawan abad ke-19, bahkan hingga dewasa ini.

Seiring dengan membaiknya pemahaman tentang ketak-terhinggaan, konsep limit barisan dan deret bilangan pun berkembang. Sebagai contoh, $1/n$ memang tidak akan pernah sama dengan 0, tetapi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dalam pengertian bahwa nilai $1/n$ dapat dibuat sedekat-dekatnya ke 0, dengan cara memilih n sebesar-besarnya. Secara umum, barisan bilangan a_n dikatakan *konvergen* ke L apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga $|a_m - L| < \varepsilon$ untuk $m \geq n$. Menggunakan kata-kata sederhana, barisan bilangan a_n konvergen ke L apabila jarak a_n ke L dapat dibuat sekecil-kecilnya, dengan memilih n sebesar-besarnya.

Dengan konsep barisan, kekonvergenan deret bilangan pun dapat didefinisikan melalui kekonvergenan barisan jumlah parsial-nya. Sebagai contoh, deret yang dipermasalahkan Zeno, yaitu $1 + ½ + ¼ + \ldots + 1/2^n + \ldots$ mempunyai *jumlah parsial* $1 + ½ + ¼ + \ldots + 1/2^n = 2 - 1/2^n$, untuk setiap bilangan asli n. Nah, sebagai barisan, $2 - 1/2^n$ konvergen ke 2, karena $1/2^n$ konvergen ke 0.

Jadi jumlah deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + 1/2^n + \ldots$ mestilah sama dengan 2, dalam pengertian bahwa deret ini konvergen ke 2.

Lalu bagaimana dengan penolakan Aristoteles terhadap adanya titik yang menempuh jarak tak terhingga dalam waktu terhingga, sebagaimana dilukiskan pada Gambar 1 di Bab 1? Dalam fisika, titik yang bermassa (positif) memang takkan mungkin memiliki kecepatan tak terhingga. Namun, dalam matematika, objek yang dibicarakan bukanlah objek fisis yang bermassa, tetapi titik pada garis, yang tak bermassa dan mungkin saja menempuh jarak tak terhingga dalam waktu yang terhingga. Dengan notasi fungsi trigonometri, jarak yang ditempuh oleh *P* pada selang waktu (12.00, 12.30) dapat dinyatakan sebagai

$$\tan(x) - \tan(-x) = 2\tan(x);$$

dengan x menuju $\frac{\pi}{2}$ (dari kiri). Selanjutnya, dengan menggunakan konsep limit yang dirumuskan dalam Kalkulus, kita mempunyai

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty.$$

Secara umum, notasi $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ berarti: *untuk setiap* $M > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga* $f(x) > M$ *untuk* $0 < |x - c| < \delta$.

Menggunakan kata-kata sederhana, $f(x)$ dapat dibuat sebesar-besarnya dengan cara memilih x sedekat-dekatnya ke c.

Konsep limit dirintis oleh Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm von Leibniz pada abad ke-17, ketika mereka berkutat dengan konsep *kecepatan sesaat* dari suatu partikel yang bergerak sepanjang suatu lintasan dan *gradien garis singgung* pada kurva di suatu titik. Pada saat itu, mereka mengandalkan intuisi, belum merumuskan konsep limit dengan cermat. Sebagai ilustrasi, misal suatu posisi suatu benda pada saat t adalah $x = t^2$, sehingga kecepatan rata-ratanya pada interval waktu $[t, t + h]$ adalah

$$\frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = 2t + h.$$

Dengan membayangkan h menuju 0, Newton kemudian menyimpulkan bahwa pada saat t, kecepatan sesaat benda tersebut mestilah sama dengan $2t$. Hitung-hitungan ini tidak mudah dicerna begitu saja. Di satu sisi, nilai h tidak boleh sama dengan 0 (karena pembagian dengan 0 tidak terdefinisi), tetapi di sisi lain kita seolah mengijinkan h sama dengan 0.

Diperlukan waktu sekitar 200 tahun untuk merumuskan konsep limit secara cermat. Bernard Bolzano dan Karl Weierstrass adalah dua orang yang berhasil merumuskan konsep limit yang kita kenal sekarang. Persisnya, fungsi f dikatakan mempunyai limit L di c, ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = L$, apabila: *untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *untuk* $0 < |x - c| < \delta$. Secara intuitif, $f(x)$ dapat dibuat sedekat-dekatnya ke L dengan cara memilih x sedekat-dekatnya ke c.

Dengan konsep limit yang ajek, konsep *turunan* dan *integral*, yang merupakan dua konsep utama dalam kalkulus, menjadi kokoh dan sebagai buahnya suatu cabang matematika modern --- yaitu analisis matematika --- lahir dan berkembang subur. Jadi, dengan dua contoh di atas, kita melihat bahwa definisi memang memainkan peran penting dalam matematika. Dengan definisi yang tepat, banyak hal yang semula membingungkan menjadi jelas. Dengan definisi yang tepat, banyak fakta terungkap dan banyak dalil dapat dibuktikan.

4. SUDUT ANTARA DUA SUBRUANG

Konsep sudut antara dua garis di ruang telah dikenal dipelajari sejak di sekolah menengah. Demikian juga dengan sudut antara garis dan bidang serta sudut antara dua bidang di ruang.

Dalam matematika, ruang berdimensi tiga hanya merupakan salah satu kasus khusus. Secara umum, kita mengenal ruang berdimensi n yang juga memiliki sifat-sifat dasar yang dimiliki oleh ruang berdimensi tiga. Di ruang berdimensi tiga, garis dan bidang yang melalui titik asal merupakan subruang berdimensi satu dan dua, berturut-turut. Di ruang berdimensi n, kita dapat memiliki subruang berdimensi $p < n$. Nah, bila kita mempunyai dua subruang berdimensi p, dengan $p < n$, bagaimana kita dapat menentukan sudut antara dua subruang tersebut? Pertanyaan yang lebih umum adalah: bagaimana kita mendefinisikan sudut antara dua subruang sembarang, di *ruang hasil kali dalam* berdimensi n?

Sejak tahun 1950-an, konsep sudut antara dua subruang di ruang berdimensi n telah dipelajari oleh banyak peneliti sebagai suatu barisan *sudut kanonik* $\theta_1, \ldots, \theta_p$. Dalam statistika, sudut kanonik dipakai sebagai ukuran ketergantungan suatu himpunan peubah acak pada himpunan peubah acak lainnya. Pada awal tahun 2000, Risteski dan Trencevski [5] menawarkan sebuah definisi geometris dari (cosinus) sudut antara dua subruang di ruang hasil kali dalam berdimensi n, dan menjelaskan hubungannya dengan sudut kanonik. Definisi yang mereka rumuskan, sayangnya, mengandung kesalahan. Saya dan kolega menemukan sebuah contoh yang memberikan nilai cosinus lebih besar daripada 1, sesuatu yang tentu saja mustahil [6].

Berangkat dari temuan tersebut, kami kemudian mempelajari hakikat sudut antara dua subruang, mulai dari sudut antara dua garis (garis = subruang berdimensi satu), antara garis dan bidang (bidang = subruang berdimensi dua), antara dua bidang, dan antara dua subruang berdimensi m yang beririsan pada subruang berdimensi $m - 1$. Dari pengamatan dan perhitungan yang kami lakukan, kami pun sampai pada kesimpulan, bahwa nilai cosinus sudut antara subruang U = span $\{u_1, ..., u_p\}$ yang berdimensi p dan subruang V = span $\{v_1, ..., v_q\}$ yang berdimensi q, dengan $p \leq q < n$, mestilah sama dengan rasio antara volume *paralelpipedium* yang direntang oleh vektor-vektor *projeksi* u_1, ... , u_p *pada* V dan paralelpipedium yang direntang oleh vektor-vektor u_1, ... , u_p, yakni

$$\cos\theta = \frac{V(u_{1|V}, \dots, u_{p|V})}{V(u_1, \dots, u_p)}.$$

Nilai rasio tersebut jelas merupakan suatu bilangan di antara 0 dan 1 (inklusif), dan tidak bergantung pada pemilihan *basis* untuk *U* dan *V*.

Tetapi, pertanyaan berikutnya adalah, dapatkah kita memperoleh rumus yang lebih menyerupai rumus sudut antara dua garis atau sudut antara dua vektor *u* dan *v* di ruang berdimensi *n*, yang dilengkapi dengan *hasil kali dalam*, yakni

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Untuk menemukan rumus seperti di atas, kita perlu mempunyai rumus untuk volume paralelpipedium berdimensi *p* di ruang berdimensi *n*. Di ruang yang dilengkapi dengan hasil kali dalam, rumus yang dimaksud adalah

$$V(u_1, \dots, u_p) = \sqrt{\det\left[\langle u_i, u_j\rangle\right]_{i,j}}.$$

Catat bahwa matriks $\left[\langle u_i, u_j\rangle\right]_{i,j}$ merupakan matriks simetris berukuran *p* × *p*. Determinan dari matriks tersebut dikenal sebagai *determinan Gram*. Nilai determinan Gram senantiasa positif. Ia mungkin bernilai nol, tetapi itu hanya terjadi apabila vektor-vektor $u_1, \ldots, u_p$ bergantung linear.

Selanjutnya, kita juga perlu menggunakan rumus *projeksi* vektor u pada suatu subruang V = span $\{v_1, \ldots, v_q\}$. Untuk memudahkan, kita dapat mengasumsikan bahwa $\{v_1, \ldots, v_q\}$ merupakan *himpunan ortonormal*. Ini berarti bahwa vektor-vektor v_i memiliki panjang 1 dan tegak lurus satu terhadap yang lainnya. Dengan asumsi ini, projeksi vektor u pada V diberikan oleh rumus

$$u_{|V} = \sum_{j=1}^{q} \langle u, v_j \rangle v_j.$$

Dalam hal $p = q$, volume paralelpipedium yang direntang oleh vektor-vektor projeksi $u_1, \ldots, u_p$ pada V sama dengan

$$V\left(u_{1|V}, \ldots, u_{p|V}\right) = \det\left[\langle u_i, v_j \rangle\right]_{i,j}.$$

Jadi, jika θ menyatakan sudut antara subruang U = span $\{u_1, \ldots, u_p\}$ dan subruang V = span $\{v_1, \ldots, v_p\}$, maka

$$\cos\theta = \frac{\det\left[\langle u_i, v_j \rangle\right]_{i,j}}{\sqrt{\det\left[\langle u_i, u_j \rangle\right]_{i,j}}}.$$

Dengan *operasi baris elementer* yang lazim dilakukan pada perhitungan determinan matriks, kita peroleh rumus sudut antara U = span $\{u_1, ..., u_p\}$ dan subruang V = span $\{v_1, ..., v_p\}$ sembarang (tidak harus ortonormal), yaitu

$$\cos\theta = \frac{\det[\langle u_i, v_j\rangle]_{i,j}}{\sqrt{\det[\langle u_i, u_j\rangle]_{i,j}}\sqrt{\det[\langle v_i, v_j\rangle]_{i,j}}}.$$

Rumus serupa dapat diperoleh untuk sudut antara U = span $\{u_1, ..., u_p\}$ dan subruang V = span $\{v_1, ..., v_q\}$ sembarang, dengan $p \leq q < n$ (namun, karena terlalu teknis, tidak diberikan di sini).

Menentukan definisi yang masuk akal adalah satu hal, menemukan rumus yang tepat merupakan hal lain yang tak kalah pentingnya. Ketika konsep yang hendak kita definisikan merupakan perumuman atau perampatan dari suatu konsep yang telah kita kenal dengan baik pada kasus sederhana, maka definisi yang kita buat haruslah mencakup kasus sederhana tersebut. Demikian juga halnya dengan rumus dari suatu konsep yang diperumum atau dirampatkan. Sebagaimana diperlihatkan di atas, rumus sudut antara dua subruang di suatu ruang berdimensi n tidak diperoleh begitu saja, tetapi melalui pengamatan pada kasus-kasus sederhana terlebih dahulu. Memperumum suatu konsep, dari yang spesifik ke yang sembarang, merupakan kegiatan bermatematika yang sering dilakukan oleh para matematikawan.

Ada kalanya matematikawan, termasuk saya, tidak mempertanyakan untuk apa definisi dan rumus yang demikian abstrak tersebut. Menurut Godfrey H. Hardy, matematikawan Inggris abad XX kelahiran abad XIX, “Matematika yang indah itu tidak harus berguna.” Bahkan, bagi Hardy, yang lebih menyukai keindahan, “Matematika yang berguna itu pada umumnya menjijikkan (*ugly*) atau membosankan (*dull*)” [7]. Bertentangan dengan pendapatnya, hasil-hasil penelitian Hardy yang tergolong indah itu beberapa puluh tahun kemudian ternyata dapat diaplikasikan pada bidang ilmu lainnya.

Penasaran dengan apa yang telah terjadi dengan rumus sudut antara dua subruang di ruang hasil kali dalam, saya melacak publikasi yang merujuk ke paper [6]. Berikut adalah beberapa di antaranya:

<u>dalam bidang Biokimia</u>:

- David, C.C. & Jacobs, D.J. (2011), “Characterizing protein motions from structure”, *J. Molecular Graphics and Modelling* 31 [8].

- David, C.C. & Jacobs, D.J. (2014), “Principal component analysis: A method for determining the essential dynamics of proteins”, *Methods in Molecular Biology* 1084 [9].

<u>dalam bidang Fisika</u>:

- Bosetti, H., dkk. (2010), “Time-reversal symmetry and covariant Lyapunov vectors for simple particle models in and out of thermal equilibrium”, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 82 [10].
- Chella, F., dkk. (2012), “Calibration of a multichannel MEG system based on the Signal Space Separation method”, *Physics in Medicine and Biology* 57 [11].

<u>dalam bidang Grafika Komputer</u>:

- Cao, W.M., dkk. (2014), “Content-based image retrieval using high-dimensional information geometry”, *Science China Information Sciences* 57 [12].
- Kaveh, A. & Fazli, H. (2011), “Approximate eigensolution of locally modified regular structures using a substructuring technique”, *Computers and Structures* 89 [13].
- Kaveh, A. (2013), “Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity”, *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity* [14].

- Liwicki, S., dkk. (2013), “Euler principal component analysis”, *Internat. J. Computer Vision* 101 [15].
- Liwicki, S., dkk. (2015), “Online kernel slow feature analysis for temporal video segmentation and tracking”, *IEEE Transactions on Image Processing* 24 [16].
- Peikert, R. & Sadlo, F. (2008), “Height ridge computation and filtering for visualization”, *IEEE Pacific Visualisation Symposium* 2008, PacificVis – Proceedings [17].

dalam bidang Optimasi:

- Haesen, S., dkk. (2009), “On the extrinsic principal directions of Riemannian submanifolds”, *Note di Matematica* 29 [18].
- Pustylnik, E., dkk. (2010), “Convergence of infinite products of nonexpansive operators in Hilbert space”, *J. Nonlinear and Convex Analysis* 11 [19].

dalam bidang *Vehicular Technology*:

- Nam, S., dkk. (2013), “A PF scheduling with low complexity for downlink multi-user MIMO systems”, *IEEE Vehicular Technology Conference* [20].
- Nam, S., dkk. (2014), “A user selection algorithm using angle between subspaces for downlink MU-MIMO systems”, *IEEE Transactions on Communications* 62 [21].

- Yi, X. & Au, E.K.S. (2011), “User scheduling for heterogeneous multiuser MIMO systems: A subspace viewpoint”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 60 [22].

Dari beberapa publikasi di atas, tampak bahwa peneliti dalam bidang Biokimia Fisika, Grafika Komputer, Optimasi, dan *Vehicular Technology*, memerlukan rumus sudut antara dua subruang di ruang berdimensi *n*, untuk mendukung riset dalam bidang mereka. Bola telah saya tendang waktu itu, kini mereka sedang memainkannya.

5. PENUTUP

Matematika merupakan output dari aktivitas bermatematika, yang dapat dipandang sebagai bagian dari budaya. Karena itu, matematika adalah suatu produk budaya. Memang, tidak setiap komunitas, apalagi bangsa, memiliki budaya bermatematika tingkat tinggi. Karena itu tidak heran bila matematika tidak berkembang di setiap komunitas/bangsa. Namun, dari catatan sejarah, matematika berkembang di Babilonia, Mesir Kuno, Yunani Kuno, Persia, Tiongkok, India, dan Eropa.

Sejak abad pertengahan, matematika telah menjadi mata kuliah wajib di perguruan tinggi, dan --- entah sejak kapan persisnya --- juga menjadi mata pelajaran wajib di sekolah menengah dan sekolah dasar. Matematika diajarkan bukan sekadar sebagai pengetahuan dasar/umum, tetapi juga untuk mengembangkan kemampuan bernalar dan berpikir abstrak (baca: pada tataran gagasan), serta meneruskan nilai-nilai yang terkait dengan pengembangan ilmu pengetahuan: ketekunan, keruntutan, dan keruntunan dalam berpikir, serta apresiasi terhadap kebenaran yang berkenaan dengan berbagai gagasan matematis.

Sejak Indonesia merdeka, Indonesia 'hanya' memiliki sekitar 250-300 doktor matematika, yang tersebar di sejumlah perguruan tinggi di Indonesia. (Di ITB, misalnya, ada sekitar 50 doktor matematika. Di perguruan tinggi lainnya, jumlahnya lebih sedikit. Banyak perguruan tinggi bahkan tidak memiliki doktor matematika sama sekali.) Selain jumlahnya yang sedikit, produktivitas riset matematikawan Indonesia lebih rendah daripada produktivitas riset matematikawan Malaysia, Thailand, dan Singapura. Secara umum, perkembangan matematika di negara kita tertinggal dari ketiga negara tetangga tersebut, walaupun belakangan ini kesadaran untuk melakukan riset di antara matematikawan kita meningkat.

Sebagaimana pernah saya sampaikan pada pidato ilmiah di ITB, untuk meningkatkan geliat riset dalam matematika di Indonesia, diperlukan beberapa upaya, antara lain membangun komunikasi dan sinergi di antara sesama matematikawan dan ilmuwan lainnya di Indonesia, serta membangun jaringan kerja sama dengan matematikawan di luar negeri. Belajar dari sejarah dunia modern, bila Indonesia ingin menjadi negara maju, maka penguasaan matematika mutlak diperlukan, seiring dengan penguasaan sains dan teknologi. Terkait dengan itu, dukungan dana dan sumber daya insani yang mumpuni untuk mendongkrak riset dalam bidang matematika dan sains dasar sangat dinantikan --- karena tanpa investasi di hulu, apa yang dapat diperoleh di hilir?

Ucapan Terima Kasih

Dengan tulus saya haturkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada para guru senior di lingkungan ITB, dari Prof. Moedomo Soedigdomarto (alm.) hingga Prof. Wono Setya Budhi dan seluruh dosen di eks Departemen Matematika ITB, serta para kolega di Forum Guru Besar ITB, yang telah membantu saya berkiprah dalam pengembangan ilmu, khususnya matematika, sejak saya mahasiswa hingga mengemban amanat sebagai Guru Besar di ITB. Secara khusus saya perlu menyampaikan terima kasih kepada Prof. Bambang Hidayat dan Prof. Mien Rifai yang telah mengusulkan saya untuk diangkat sebagai anggota Akademi Ilmu Pengetahuan Indonesia. Ucapan terima kasih saya sampaikan juga kepada Pimpinan serta seluruh anggota AIPI yang telah mendukung pengangkatan saya sebagai anggota AIPI. Kiranya saya dapat melaksanakan amanat yang tidak ringan ini, bersama-sama dengan seluruh anggota AIPI dan para kolega di ITB, untuk memajukan ilmu pengetahuan di Indonesia dan meningkatkan kualitas kehidupan bangsa Indonesia.

Kuliah inaugurasi ini takkan terlaksana tanpa dukungan dari Rektor ITB dan jajarannya, serta bantuan dari staf AIPI. Untuk itu saya ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Daftar Pustaka

(Terurut berdasarkan kemunculan)

[1] Wikipedia, “Mathematics”, http://en.wikipedia.org/wiki/, April 2017.

[2] Hersh, R., *Experiencing Mathematics*, American Mathematical Society, 2013.

[3] Gunawan, H., *Menuju Tak Terhingga*, Penerbit ITB, 2016.

[4] Gunawan, H., *Lingkaran: Menguak Misteri Bilangan, Bangun Datar dan Bangun Ruang Terkait Lingkaran*, Graha Ilmu, 2015.

[5] Risteski, R. & Trencevski, K., “Principle values and principal subspaces of two subspaces of vector spaces with inner product”, *Beitrage Alg. Geom.* 42 (2001), 289-300.

[6] Gunawan, H., Neswan, O., & Setya-Budhi, W., “A formula for angles between subspaces of inner product spaces”, *Beitrage Alg. Geom.* 46 (2005), 311-320.

[7] Hardy, G.H., *A Mathematician’s Apology*, Stellar Editions, 1940.

[8] David, C.C. & Jacobs, D.J., “Characterizing protein motions from structure”, *J. Molecular Graphics and Modelling* 31 (2011).

[9] David, C.C. & Jacobs, D.J., “Principal component analysis: A method for determining the essential dynamics of proteins”, *Methods in Molecular Biology* 1084 (2014).

[10] Bosetti, H., Posch, H.A., Dellago, C., & Hoover, W.G., “Time-reversal symmetry and covariant Lyapunov vectors for simple particle models in and out of thermal equilibrium”, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 82 (2010).

[11] Chella, F., Zappasodi, F., Marzetti, L., Penna, S.D., & Pizzella, V., “Calibration of a multichannel MEG system based on the Signal Space Separation method”, *Physics in Medicine and Biology* 57 (2012).

[12] Cao, W.M., Liu, N., Kong, Q.C., & Feng, H., “Content-based image retrieval using high-dimensional information geometry”, *Science China Information Sciences* 57 (2014).

[13] Kaveh, A. & Fazli, H., “Approximate eigensolution of locally modified regular structures using a substructuring technique”, *Computers and Structures* 89 (2011).

[14] Kaveh, A., “*Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity*”, Springer (2013).

[15] Liwicki, S., Tzimiropoulos, G., Zafeiriou, S., & Pantic, M., “Euler principal component analysis”, *Internat. J. Computer Vision* 101 (2013).

[16] Liwicki, S., Zafeiriou, S.P., & Pantic, M., "Online kernel slow feature analysis for temporal video segmentation and tracking", *IEEE Transactions on Image Processing* 24 (2015).

[17] Peikert, R. & Sadlo, F., "Height ridge computation and filtering for visualization", *IEEE Pacific Visualisation Symposium 2008*, PacificVis – Proceedings (2008).

[18] Haesen, S., Kowalczyk, D., & Verstraelen, L., "On the extrinsic principal directions of Riemannian submanifolds", *Note di Matematica* 29 (2009).

[19] Pustylnik, E., Reich, S., & Zaslavski, A.J., "Convergence of infinite products of nonexpansive operators in Hilbert space", *J. Nonlinear and Convex Analysis* 11 (2010).

[20] Nam, S., Kim, J., & Han, Y., "A PF scheduling with low complexity for downlink multi-user MIMO systems", *IEEE Vehicular Technology Conference* (2013).

[21] Nam, S., Kim, J., & Han, Y., "A user selection algorithm using angle between subspaces for downlink MU-MIMO systems", *IEEE Transactions on Communications* 62 (2014).

[22] Yi, X. & Au, E.K.S., "User scheduling for heterogeneous multiuser MIMO systems: A subspace viewpoint", *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 60 (2011).

Biodata

Hendra Gunawan, lahir di Bandung pada tahun 1964, mendapatkan gelar Sarjana dalam bidang Matematika dari Institut Teknologi Bandung pada tahun 1987. Ia bergabung sebagai dosen di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung (FMIPA-ITB), pada tahun 1988, dan kemudian melanjutkan studinya hingga meraih gelar doktor dalam bidang Matematika dari *The University of New South Wales*, Sydney, pada tahun 1992. Pada tahun 2006, ia diangkat sebagai Guru Besar pada FMIPA-ITB. Selain mengajar, ia aktif meneliti dalam bidang analisis matematika, khususnya dalam area Analisis Fourier dan Analisis Fungsional. Daftar publikasi dan sitasinya dapat dilihat di https://scholar.google.co.id/citations?user=U9ZCm_YAAAAJ&hl=en.

Pada tahun 2015, Hendra Gunawan diangkat sebagai anggota Akademi Ilmu Pengetahuan Indonesia dan bergabung dengan Komisi Ilmu Pengetahuan Dasar. Pada tahun 2016, ia mendapatkan Penghargaan Habibie dalam Bidang Ilmu Dasar. Selain sering menulis di media massa, ia mengasuh beberapa blog, yaitu: (1) “Bermatematika” (https://bermatematika.net), (2) “Bersains” (https://bersains.wordpress.com), (3) “Anak Bertanya Pakar Menjawab” (http://www.anakbertanya.com), dan (4) “Indonesia 2045” (http://indonesia2045.com).