MASALAH INTERPOLASI 1-D DAN 2-D

Hendra Gunawan
ITB Bandung
http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/
Analysis and Geometry Group
Bandung Institute of Technology
Bandung, Indonesia

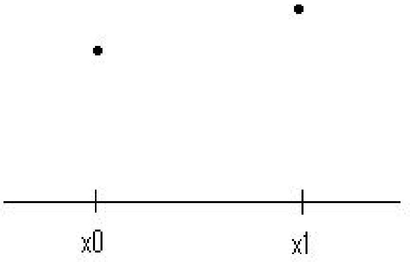
Seminar Nasional Analisis Matematika IV
16 April 2011

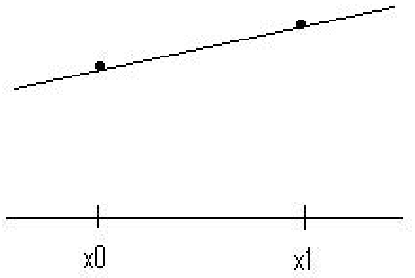
Outline

Interpolasi Linear

Diberikan dua titik x_0 dan x_1 di $\mathbb{R}$ dengan $x_0 < x_1$, dan dua bilangan $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, terdapat tepat sebuah garis lurus $y = mx + k = f(x)$ sehingga

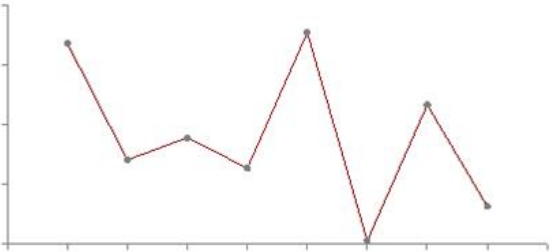
$$f(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1.$$


x0
x1


x0
x1

Interpolasi Linear Bagian demi Bagian

Diberikan n titik $x_i \in \mathbb{R}$ dan n bilangan $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, interpolan yang paling trivial adalah fungsi linear bagian demi bagian yang menghubungkan titik-titik (x_i, c_i) tersebut.



Interpolasi Polinomial

Diberikan tiga titik berbeda $x_0,\ x_1$ dan x_2 di $\mathbb{R}$, dan tiga bilangan $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, terdapat tepat sebuah parabola

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

sehingga

$$f(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Secara umum, diberikan $n+1$ titik berbeda $x_i \in \mathbb{R}$ dan $n+1$ bilangan real c_i, terdapat tepat sebuah polinom berderajat n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

yang grafiknya melalui titik-titik $(x_i, c_i),\ i = 1, \ldots, n$.

Keluarga fungsi $\{1, x, \ldots, x^n\}$ dapat dipakai untuk menyelesaikan masalah interpolasi

$$f(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

dengan $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dan $c_i \in \mathbb{R}$ sembarang.

Apa kuncinya?

Apakah karena $\{1, x, \ldots, x^n\}$ bebas linear (selain banyak fungsinya sama dengan banyak data yang diberikan)?

Bagaimana bila kita gunakan $\{1, x^2\}$ untuk menyelesaikan masalah interpolasi

$$f(-1) = c_0, \quad f(1) = c_1.$$

Jika $c_0 = c_1$, maka terdapat banyak solusi, yakni semua fungsi f yang berbentuk

$$f(x) = c_0[\lambda + (1 - \lambda)x^2].$$

Jika $c_0 \neq c_1$, maka berapapun $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, fungsi $f(x) = \lambda + \mu x^2$ tidak akan menginterpolasi data tersebut.

Mengapa $\{1, x^2\}$ gagal? Secara umum, misalkan kita ingin mencari $f(x) = \lambda + \mu x^2$ sehingga

$$f(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1.$$

Maka, kita berhadapan dengan sistem persamaan

$$\lambda + \mu x_i^2 = c_i, \quad i = 0, 1.$$

Eksistensi solusi sistem ini tergantung pada nilai determinan

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0^2 \\ 1 & x_1^2 \end{vmatrix} = x_1^2 - x_0^2.$$

Karena determinan mungkin bernilai nol, eksistensi solusi tidak dijamin. Kalaupun eksis, ketunggalan tidak dipenuhi.

Determinan Vandermonde

Jadi kunci yang membuat $\{1, x, \ldots, x^n\}$ dapat selalu menyelesaikan masalah interpolasi

$$f(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

bukan karena mereka bebas linear, tapi karena

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j<i} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Determinan ini dikenal sebagai determinan *Vandermonde*.

Sistem Chebyshev

Keluarga fungsi $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ disebut *sistem Chebyshev* pada $A \subseteq \mathbb{R}$ apabila

$$\det[\phi_j(x_i)] \neq 0$$

untuk sembarang $x_1 < \cdots < x_n$ di A.

Contoh. $\{1, x, \ldots, x^n\}$ merupakan sistem Chebyshev pada $\mathbb{R}$.

Contoh lainnya

Keluarga fungsi $\{\sin \pi x, \ldots, \sin n\pi x\}$ merupakan sistem Chebyshev pada $(0, 1)$, sementara $\{1, \cos \pi x, \ldots, \cos n\pi x\}$ merupakan sistem Chebyshev pada $[0, 1]$, dengan

$$\det[\sin j\pi x_i] = 2^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} \sin \pi x_i \prod_{j<i} (\cos \pi x_i - \cos \pi x_j).$$

$$\det[\cos j\pi x_i] = 2^{n(n-1)/2} \prod_{j<i} (\cos \pi x_i - \cos \pi x_j).$$

[Fajar Yuliawan (ITB)]

Akibat. Jika $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ adalah sistem Chebyshev pada A, maka untuk setiap $x_1 < \cdots < x_n$ di A dan sembarang bilangan $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ masalah interpolasi

$$f(x_i) = c_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

mempunyai solusi tunggal $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x)$.

Polinom Lagrange

Dengan menggunakan $\{1, x, \ldots, x^n\}$ sebagai sistem Chebyshev, masalah interpolasi $f(x_i) = c_i, \; i = 0, 1, \ldots, n$ mempunyai solusi tunggal $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$.

Lagrange menemukan bahwa f dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x)$$

dengan

$$\phi_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Perhatikan bahwa $\phi_i(x_i) = 1$ dan $\phi_i(x_j) = 0$ untuk $j \neq i$.

Masalah interpolasi secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$L_i f = c_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

dengan L_i menyatakan *fungsional linear* (yang memetakan fungsi f secara linear ke suatu bilangan $L_i f$) dan $c_i \in \mathbb{R}$.

Contoh.

- $L_i f = f(x_i) =$ nilai f di x_i.
- $L_i f = \int_a^b x^i f(x)\,dx =$ momen ke-i dari f pada $[a, b]$.
- $L_i f = f^{(i)}(c) =$ turunan ke-i dari f di c.

Bila kita gunakan $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sebagai basis untuk ruang interpolannya, maka sistem persamaan

$$L_i f = \sum_{j=1}^{n} a_j L_i v_j = c_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

akan mempunyai solusi tunggal $f = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ jika dan hanya jika

$$\det[L_i v_j] \neq 0.$$

Contoh. Masalah interpolasi momen

$$L_i f = \int_0^1 x^i f(x)\,dx = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

mempunyai solusi tunggal $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ jika dan hanya jika

$$\det[L_i v_j] = \begin{vmatrix} \int_0^1 dx & \int_0^1 x\,dx & \cdots & \int_0^1 x^n\,dx \\ \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx & \cdots & \int_0^1 x^{n+1}\,dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 x^n\,dx & \int_0^1 x^{n+1}\,dx & \cdots & \int_0^1 x^{2n}\,dx \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Di sini kita menggunakan $v_i(x) = x^i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ sebagai basis untuk ruang interpolannya.)

Perhatikan bahwa

$$\det[L_i v_j] = \begin{vmatrix} \langle v_0, v_0\rangle & \langle v_0, v_1\rangle & \cdots & \langle v_0, v_n\rangle \\ \langle v_1, v_0\rangle & \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_0\rangle & \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{vmatrix},$$

dengan $\langle v_i, v_j\rangle := \int_0^1 v_i(x)v_j(x)\,dx$.

Determinan Gram

Determinan tadi merupakan *determinan Gram*, yang dijamin tidak nol karena $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ bebas linear. (Secara geometris, determinan Gram di atas menyatakan kuadrat volume paralelpipedium yang direntang oleh $v_0, v_1, \ldots, v_n$.)

Jadi masalah interpolasi momen

$$L_i f = \int_0^1 x^i f(x)\, dx = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

dijamin mempunyai solusi tunggal berbentuk $f(x) = \sum a_i x^i$.

Who's who..

Masalah interpolasi telah dipelajari cukup lama, setidaknya sejak Newton (1675) dan Taylor (17xx), yang diikuti oleh Lagrange (1795), Legendre (17xx), Gauss, (18xx), Chebyshev (18xx), Lebesgue (18xx), Erdös (19xx), dst.

Masalah interpolasi 2-D dipelajari antara lain oleh Zakhor pada akhir 1980-an [8, 9].

Pada 2005, Alghofari [1] mempelajari masalah interpolasi yang meminimumkan energi fungsional tertentu. Hasil Alghofari diperluas oleh Gunawan dkk dalam 3 tahun terakhir [2, 3, 7].

Sebagai ilustrasi, fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang mengenterpolasi (x_i, c_i), $i = 1, \ldots, n$, pada pita $[0,1] \times \mathbb{R}$, dan meminimumkan energi potensial beban aksial

$$E_1 := \int_0^1 |f'(x)|^2 \, dx$$

adalah fungsi linear bagian demi bagian yang menghubungkan n titik tersebut. Bila fungsinya harus meminimumkan kurvatur

$$E_2 := \int_0^1 |f''(x)|^2 \, dx,$$

maka interpolannya merupakan fungsi kubik bagian demi bagian (lihat [2]).

Interpolasi 2-D

Diberikan data berupa nilai c_i di titik-titik $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N$, pada $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ingin dicari fungsi $u = f(x, y)$ sehingga

$$f(p_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Interpolasi Polinomial 2-D

Sebagai contoh, diberikan tiga titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ di $\mathbb{R}^2$ dan tiga bilangan $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, kita ingin tahu apakah terdapat tepat sebuah polinom dua peubah $u = a + bx + cy$ sehingga

$$u(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jawabannya TIDAK SELALU.

Perhatikan determinan

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Bila $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$ dan (x_3, y_3) segaris, maka determinan di atas bernilai nol (karena $(x_3 - x_1)/(x_2 - x_1) = (y_3 - y_1)/(y_2 - y_1)$).

Jadi eksistensi polinom $u = a + bx + cy$ yang menginterpolasi ketiga titik tersebut tidak dijamin. Kalaupun eksis, tidak tunggal.

Sistem Chebyshev pada $\mathbb{R}^2$?

Bila kita mempunyai dua sistem Chebyshev, sebutlah $\Phi := \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ dan $\Psi := \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, apakah hasilkali tensornya, yakni $\{\phi_i(x)\psi_j(y) \,:\, i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\}$, membentuk sistem Chebyshev pada $\mathbb{R}^2$?

Dalam perkataan lain, diberikan mn titik di $\mathbb{R}^2$, apakah senantiasa terdapat $u = \sum_i \sum_j a_{ij}\phi_i(x)\psi_j(y)$ yang menginterpolasi data pada mn titik tersebut?

Jawabannya NEGATIF.

Hasil kali tensor dari dua buah sistem Chebyshev pada $\mathbb{R}$ secara umum bukan merupakan sistem Chebyshev pada $\mathbb{R}^2$.

Sebagai contoh, $\{\phi_1(x) := 1, \phi_2(x) := x\}$ merupakan sistem Chebyshev pada $\mathbb{R}$, namun

$$\{\phi_i(x)\phi_j(y) \,:\, i, j = 1, 2\} = \{1, x, y, xy\}$$

bukan merupakan sistem Chebyshev pada $\mathbb{R}^2$: Diberikan empat titik sembarang, tidak dijamin ada $u = \sum_i \sum_j a_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y)$ yang menginterpolasi data pada empat titik tersebut.

Walau Demikian ..[3]

Teorema. Misal $P := \{p_i = (x_i, y_i) : i = 1, \dots, N\}$ membentuk grid persegipanjang $m \times n$ pada $\mathbb{R}^2$, yakni P dapat dituliskan ulang sebagai

$$\{(x_i, y_j) : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

dengan $m \times n = N$, $a \leq x_1 < \cdots < x_m \leq b$, dan $c \leq y_1 < \cdots < y_n \leq d$. Misal $\Phi := \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ dan $\Psi := \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ berturut-turut adalah sistem Chebyshev pada $[a, b]$ dan $[c, d]$. Maka, masalah interpolasi

$$f(x_i, y_j) = c_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

mempunyai solusi tunggal $u = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y)$.

Ide Pembuktian

Sistem persamaan yang terkait dengan masalah interpolasi tadi adalah $M\mathbf{a} = \mathbf{c}$ dengan

$$M = [\phi_k(x_i)] \otimes [\psi_l(y_j)],$$

yang merupakan *hasil kali Kronecker* dari matriks pertama yang terkait dengan sistem Chebyshev Φ dan matriks kedua yang terkait dengan sistem Chebyshev Ψ.

Karena $\det M = \big(\det[\phi_k(x_i)]\big)^n \big(\det[\psi_l(y_j)]\big)^m$ dan kedua determinan di ruas kanan tidak nol, maka $\det M \neq 0$, sehingga sistem persamaan di atas pasti mempunyai solusi tunggal.

Hasil Kali Kronecker

Hasil kali Kronecker dari dua matriks $M_1 := [a_{ij}]_{m\times m}$ and $M_2 := [b_{kl}]_{n\times n}$ didefinisikan sebagai

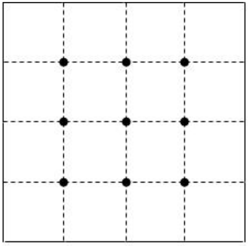
$$M_1 \otimes M_2 := \begin{bmatrix} a_{11}M_2 & a_{12}M_2 & \cdots & a_{1m}M_2 \\ a_{21}M_2 & a_{22}M_2 & \cdots & a_{2m}M_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}M_2 & a_{m2}M_2 & \cdots & a_{mm}M_2 \end{bmatrix}_{p\times p}$$

dengan $p = mn$.

Fakta [6]. $\det M_1 \otimes M_2 = (\det M_1)^n (\det M_2)^m$.

Contoh. Misal kita ingin menginterpolasi data $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}),(\frac{1}{4},\frac{1}{2},1)$, $(\frac{1}{4},\frac{3}{4},2)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},1)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$, $(\frac{1}{2},\frac{3}{4},1)$, $(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, $(\frac{3}{4},\frac{1}{2},1),(\frac{3}{4},\frac{3}{4},1)$.

Perhatikan bahwa titik-titik yang terkait dengan data tersebut membentuk grid persegi 3×3 pada $(0,1)\times(0,1)$:



.

Jika kita menggunakan sistem Chebyshev $\{\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x\}$ dan $\{1, \cos \pi y, \cos 2\pi y\}$, maka interpolan-nya berbentuk

$$\begin{aligned} u(x,y) = & a_{11} \sin \pi x + a_{12} \sin \pi x \cos \pi y + a_{13} \sin \pi x \cos 2\pi y \\ & + a_{21} \sin 2\pi x + a_{22} \sin 2\pi x \cos \pi y + a_{23} \sin 2\pi x \cos 2\pi y \\ & + a_{31} \sin 3\pi x + a_{32} \sin 3\pi x \cos \pi y + a_{33} \sin 3\pi x \cos 2\pi y. \end{aligned}$$

Sistem persamaannya dapat disederhanakan dengan OBE menjadi

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right].$$

Kita peroleh

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin\pi x\cos\pi y - \frac{1}{2}\sin\pi x\cos 2\pi y \\ &+ \frac{1}{4}\sin 2\pi x - \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2\pi x\cos\pi y + \frac{1}{4}\sin 2\pi x\cos 2\pi y \\ &+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\sin 3\pi x - \frac{1}{2}\sin 3\pi x\cos\pi y + \frac{1}{2}\sin 3\pi x\cos 2\pi y \end{aligned}$$

sebagai interpolan yang dikehendaki.

Lebih Jauh ..

Misal $G = \{(a_i, b_i, c_i) : i = 1, 2, \ldots, N\}$ himpunan titik di $A_1 \times A_2 \times \mathbb{R}$, dan $H = \{(x_i, y_j) : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$ adalah grid persegipanjang 'minimal' yang memuat $\{(a_i, b_i) : i = 1, \ldots, N\}$. Di sini kita asumsikan bahwa $\{(a_i, b_i) : i = 1, \ldots, N\}$ sendiri bukan grid persegipanjang, sehingga $N < mn$.

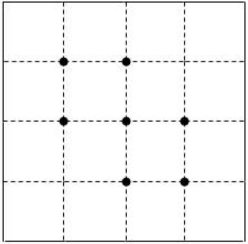
Misal $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ dan $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ adalah sistem Chebyshev pada A_1 dan A_2 berturut-turut. Maka kita dapat menggunakan

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) \tag{1}$$

sebagai interpolan G.

Substitusikan titik-titik pada G ke persamaan (1), kita peroleh sistem persamaan dengan N persamaan dan mn variabel. Karena rank matriksnya sama dengan $N < mn$, maka sistem mempunyai banyak solusi. Dalam hal ini terdapat banyak nilai a_{ij} yang akan menjadikan fungsi u pada (1) sebagai interpolan G.

Contoh. Misalkan kita ingin menginterpolasi data $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1), (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 2)$. Titik-titik yang terkait dengan data di atas termuat dalam grid persegi 3×3 pada $(0, 1) \times (0, 1)$:



Jika kita gunakan $\{\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x\}$ dan $\{1, \cos \pi y, \cos 2\pi y\}$ sebagai sistem Chebyshev, maka interpolan-nya berbentuk

$$\begin{aligned} u(x,y) =& a_{11} \sin \pi x + a_{12} \sin \pi x \cos \pi y + a_{13} \sin \pi x \cos 2\pi y \\ & + a_{21} \sin 2\pi x + a_{22} \sin 2\pi x \cos \pi y + a_{23} \sin 2\pi x \cos 2\pi y \\ & + a_{31} \sin 3\pi x + a_{32} \sin 3\pi x \cos \pi y + a_{33} \sin 3\pi x \cos 2\pi y. \end{aligned}$$

Substitusikan data dan sederhanakan sistemnya dengan OBE:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \sqrt{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \sqrt{2}-\frac{3}{2} \end{array}\right].$$

Salah satu interpolan yang memenuhi sistem persamaan ini adalah:

$$u(x,y) = \left(\frac{-1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\sin \pi x - \sin \pi x \cos 2\pi y + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin 2\pi x$$
$$+ \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) 0.25 \sin 2\pi x \cos 2\pi y.$$

Catatan

Sebagian hasil yang disajikan merupakan hasil penelitian bersama dengan E. Rusyaman (Unpad).
Hasil-hasil tersebut telah pula diperumum ke dimensi N oleh L. Ambarwati (Mhs S3 MA-ITB).
Selain itu, ditemukan pula bahwa polinom dua peubah berderajat n selalu dapat menginterpolasi data pada $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ titik yang membentuk grid segitiga.

Sebagian hasil penelitian ini telah dikirim ke beberapa jurnal di dalam dan luar negeri, dan sebagian lainnya masih sedang dalam proses penulisan.

Ucapan Terimakasih

Penelitian ini didanai oleh Program Penguatan Riset Institusi Tahun 2010/2011.

- A.R. Alghofari (2005), *Problem in Analysis Related to Satellites*, Ph.D. Thesis, UNSW, Sydney, Australia.
- H. Gunawan, F. Pranolo, E. Rusyaman (2008), "An interpolation method that minimizes an energy integral of fractional order", in D. Kapur (Ed.): *Asian Symposium on Computer Mathematics 2007*, LNAI 5081, 151-162, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- H. Gunawan, E. Rusyaman, L. Ambarwati (2009), "Surfaces with prescribed nodes and minimum energy integral of fractional order", submitted.
- G.B. Lorenz (1966), *Approximation of Functions*, AMS Chelsea Publishing, USA.
- C.W. Patty (1993), *Foundation of Topology*, PWS Publishing Company, USA.

- C.R. Rao and M.B. Rao (1998), *Matrix Algebra and Its Applications to Statistics and Econometric*, World Scientific, Singapore.
- E. Rusyaman, H. Gunawan, A.K. Supriatna, R.E. Siregar (2010), "Eksistensi interpolan sinusoida berdimensi dua" (in Indonesian), *J. Mat. Sains*.
- A. Zakhor (1987), *Reconstruction of Multidimensional Signals from Multiple Level Threshold Crossings*, Ph.D. Dissertation, MIT, USA.
- A. Zakhor and G. Alvstad (1992), "Two-dimensional polynomial interpolation from nonuniform samples", *IEEE Trans. Signal Processing* **40**, 169–180.