ANALISIS NUMERIK LANJUT

Hendra Gunawan, Ph.D.

2006/2007

BAB 0. PENDAHULUAN

Beberapa contoh masalah dan metode numerik:

- Menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$ atau $x = g(x)$ $\rightarrow$ Metode Bagi-Dua, Metode Newton, Teorema Titik Tetap
- Menghitung integral tentu $\rightarrow$ Aturan Trapesium, Aturan Simpson
- Menyelesaikan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\rightarrow$ Metode Eliminasi Gauss
- Menyelesaikan Masalah Nilai Awal $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ $\rightarrow$ Metode Euler, Metode Runge-Kutta
- Menghampiri (nilai) fungsi $\rightarrow$ Teorema Taylor, Metode Kuadrat Terkecil, Interpolasi Polinom, Deret Fourier, Wavelet (Analisis Multi Resolusi)

Pengetahuan yang diperlukan:

- Analisis Real: bilangan real, barisan, fungsi, limit, turunan, dan integral
- Analisis Fungsional: ruang norm, ruang hasil kali dalam, ruang fungsi C[a,b], L^p, dan lain-lain
- Analisis Fourier: deret dan transformasi Fourier, basis ortonormal, proyeksi ortogonal

Contoh 1: Menyelesaikan MNA $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

- Tuliskan MNA $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ sebagai persamaan integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

- Hitung hampiran Picard (secara iteratif):

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

dengan hampiran awal $y_0(x) = y_0$.

Metode Euler untuk MNA
$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$

- Tentukan $h > 0$ (sbg ukuran langkah)
- Tulis $x_n = x_0 + n.h$, $y_n = y(x_n)$
- Hitung (secara rekursif):

  $y_{n+1} = y_0 + h.f(x_n,y_n)$.

Metode Runge-Kutta untuk MNA

$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$

- Tentukan $h > 0$ (sbg ukuran langkah)
- Tulis $x_n = x_0 + n.h$, $y_n = y(x_n)$
- Hitung (secara rekursif):

  $y_{n+1} = y_0 + h/6.[k_{n,1} + 2.k_{n,2} + 2.k_{n,3} + k_{n,4}]$

  dengan

  $k_{n,1} = f(x_n,y_n)$

  $k_{n,2} = f(x_n+h/2,y_n+h/2.k_{n,1})$

  $k_{n,3} = f(x_n+h/2,y_n+h/2.k_{n,2})$

  $k_{n,4} = f(x_n+h,y_n+h.k_{n,3})$.

Metode Euler vs Metode Runge-Kutta

Tinjau MNA y' = y, y(0) = 1.

(1) Dengan h = 0.125, gunakan metode Euler untuk menaksir nilai y(1). [Hasil: y(1) = 2.56578]

(2) Dengan h = 0.5, gunakan metode Runge Kutta untuk menaksir nilai y(1). [Hasil: y(1) = 2.71735]

Taksiran manakah yang lebih baik? [Cttn: y(1) = e]

Galat dengan metode Euler ~ h^2;

Galat dengan metode Runge Kutta ~ h^4.

→ Secara umum, metode Runge Kutta lebih baik daripada metode Euler.

Latihan: Menyelesaikan MNA

- Diberikan MNA $y' = [x^2 - y^2]^{1/2}$, $y(0) = 0$.
- Hitung hampiran Picard $y_1(x)$ dan $y_2(x)$; lalu gunakan $y_2(x)$ untuk menaksir nilai $y(0.5)$ dan $y(1)$.
- Gunakan metode Runge-Kutta untuk menghampiri nilai $y(0.5)$ dan $y(1)$.

Contoh 2: Metode Kuadrat Terkecil

- Diberikan data n titik (x_1,y_1), (x_2,y_2), … , (x_n, y_n), tentukan persamaan garis lurus $y = mx + c$ yg merupakan hampiran terbaik untuk data tsb.
- Secara aljabar, masalah ini setara dengan menentukan proyeksi ortogonal vektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ terhadap bidang yang direntang oleh vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ dan $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$.
- Bila y^* adalah proyeksi ortogonalnya, maka galatnya adalah $\| y^* - y \|_2$.

Yang Akan Dipelajari

- Ruang linear, ruang bernorma, ruang hasilkali dalam
- Operator linear pada ruang bernorma, fungsional linear, jenis-jenis kekonvergenan.
- Teori Interpolasi: interpolasi polinom Lagrange/Hermite, interpolasi linear bagian demi bagian, interpolasi trigonometrik
- Hampiran terbaik di ruang norm: himpunan konveks, eksistensi titik ekstrim, eksistensi dan ketunggalan hampiran terbaik
- Hampiran terbaik di ruang hasil kali dalam: proyeksi ortogonal, eksis-tensi dan ketunggalan hampiran terbaik, metode kuadrat terkecil
- Polinom ortogonal, operator proyeksi, batas galat seragam
- Teorema Titik Tetap Banach dan aplikasinya
- Kalkulus diferensial untuk operator tak-linear*
- Metode Newton di ruang Banach
- Teorema Titik Tetap Brouwer dan Teorema Titik Tetap Schauder*

(* bila waktu tersedia)

Buku Rujukan: Atkinson & Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer 2001.