ANALISIS NUMERIK LANJUT

Hendra Gunawan, Ph.D.

2006/2007

BAB I. RUANG LINEAR

Pelajari definisi dan contoh:

- ruang linear (hal. 1-3);
- subruang (hal. 3);
- kombinasi linear (hal. 4);
- bebas/bergantung linear (hal. 4);
- span atau subruang yang direntang oleh sejumlah vektor (hal. 5);
- dimensi (hal. 5);
- fungsi/pemetaan linear (hal. 5);
- dua ruang isomorfik (hal. 6);
- produk Cartesius (hal. 6);

Buat rangkumannya!

Ruang Bernorma (hal. 7)

Misal V ruang linear atas lapangan skalar K. Fungsi || . || : V → **R** yang bersifat:

1. $||v|| \geq 0$ utk tiap $v \in V$; $||v|| = 0$ jhj $v = 0$;
2. $||av|| = |a|.||v||$ utk tiap $v \in V$ dan $a \in K$;
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ utk tiap $u,v \in V$,

disebut *norma* pada V, dan (V,|| . ||) disebut *ruang bernorma*.

Contoh Ruang Bernorma

1. $\mathbf{R}^d$ dengan $||x||_p = [\sum$ x_i^p$]^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$.
2. $C[a,b]$ dengan $||f||_\infty = \max \{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$.
3. $C^k[a,b]$ dengan $||f||_{k,\infty} = \max \{||f^{(j)}||_\infty : 0 \leq j \leq k\}$.
4. $B[a,b]$ dengan $||f||_\infty = \sup \{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$.

Latihan: Buktikan bahwa $|| \,.\, ||_\infty$ pada Contoh 2 merupakan norma.

Himpunan Buka dan Himpunan Tutup

Pelajari definisi bola buka, himpunan buka, dan himpunan tutup pada hal. 9.

Kekonvergenan di Ruang Bernorma (hal. 9)

- Barisan $\{u_n\}$ di ruang bernorma V dikatakan *konvergen* ke u di V, ditulis $u_n \rightarrow u$ (bila $n \rightarrow \infty$), jhj $\lim \|u_n - u\| = 0$.

- Fungsi $f : V \rightarrow R$ dikatakan *kontinu* di $u \in V$ jhj utk tiap barisan $\{u_n\}$ di V dengan $u_n \rightarrow u$ berlaku $f(u_n) \rightarrow f(u)$ (bila $n \rightarrow \infty$).

- **Proposisi**: $\| \,.\, \|$ merupakan fungsi kontinu.

Ekuivalensi Dua Norma (hal. 10)

- Dua norma $|| \,.\, ||_1$ dan $|| \,.\, ||_2$ dikatakan *ekuivalen* jhj terdapat konstanta positif c_1 dan c_2 shg $c_1||u||_1 \leq ||u||_2 \leq c_2||u||_1$ utk tiap u di V.
- **Teorema**: Pada ruang berdimensi hingga, setiap dua norma selalu ekuivalen.
- Pada ruang berdimensi tak hingga, dua norma mungkin tidak ekuivalen. Contoh diberikan pada hal. 11.

Ruang Banach (hal. 11)

- Misal $(V, \|\ .\ \|)$ ruang bernorma. Barisan $\{u_n\}$ di V disebut barisan Cauchy jhj $\lim \|u_m - u_n\| = 0$.
- Setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy, namun tidak sebaliknya.
- V dikatakan lengkap jhj setiap barisan Cauchy di V konvergen (ke suatu titik di V).
- Contoh: $\mathbf{R}^d$ dengan norma $\|\ .\ \|_p$ merupakan ruang yang lengkap.

Lengkapan dari Ruang Bernorma (hal. 12)

Teorema:

Setiap ruang bernorma V dapat diperluas secara tunggal (terhadap suatu isomorfisma) menjadi ruang yang lengkap.

Perluasan dari V yang merupakan ruang yang lengkap disebut *lengkapan* dari V.

Soal Latihan

- Kerjakan Soal No. 1.2.4 (hal. 16) dan 1.2.12 (hal. 17)

Ruang Hasilkali Dalam (hal. 18)

Misal V ruang linear atas lapangan K.

Fungsi (.,.) : V x V → K yang bersifat:

1. $(u,u) \geq 0$ utk tiap $u \in V$; $(u,u) = 0$ jhj $u = 0$;
2. $(u,v) = (v,u)^*$ utk tiap $u,v \in V$;
3. $(au+bv,w) = a(u,w) + b(v,w)$ utk tiap $u,v,w \in V$ dan $a,b \in K$,

disebut *hasilkali dalam* pada V, dan (V,(.,.)) disebut *ruang hasilkali dalam*.

Ketaksamaan Schwarz, Kesamaan polarisasi, dan Hukum jajargenjang

- **Ketaksamaan Schwarz**: $|(u,v)|^2 \leq (u,u).(v,v)$.
- Akibat 1: $||u||=(u,u)^{1/2}$ merupakan norma.
- Akibat 2: Jika $u_n \rightarrow u$ dan $v_n \rightarrow v$, maka $(u_n,v_n) \rightarrow (u,v)$. [Hasilkali dalam merupakan fungsi kontinu pada V x V.]
- **Kesamaan polarisasi**: $(u,v) = ¼.[||u+v||^2 - ||u-v||^2 + i||u+iv||^2 – i||u-iv||^2]$.
- **Hukum jajargenjang**: $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2.||u||^2 + 2.||v||^2$.

Ruang Hilbert (hal. 22)

Ruang hasilkali dalam yang lengkap disebut *ruang Hilbert*.

Contoh Ruang Hilbert:

1. $\mathbf{C}^d$ dengan hasilkali dalam $(x,y) = \sum x_i y_i^*$.
2. $l^2 := \{\{xi\} : \sum |xi|^2 < \infty\}$ dengan hasilkali dalam $(x,y) = \sum x_i y_i^*$.

Ortogonalitas (hal. 23)

- Dua vektor u dan v di ruang hasilkali dalam (V,(.,.)) dikatakan *ortogonal*, ditulis $u \perp v$, jhj $(u,v) = 0$.
- Lebih umum, *sudut* θ antara u dan v adalah $\theta = \arccos (u,v)/[||u||.||v||]$.
- Vektor u dikatakan *ortogonal terhadap* (*himpunan*) W di V, ditulis $u \perp W$, jhj $u \perp w$ utk tiap $w \in W$.

Proses Gram-Schmidt (hal. 26)

Misal $\{w_n\}$ basis utk ruang hasilkali dalam V. Maka terdapat basis ortonormal $\{v_n\}$ sedemikian shg utk tiap $N \geq 1$ berlaku

$$\operatorname{span}\{w_n\}_{n=1,\ldots,N} = \operatorname{span}\{v_n\}_{n=1,\ldots,N} .$$

Pelajari Contoh 1.3.13 (hal. 27).

Soal Latihan

- Kerjakan Soal No. 1.3.1 (hal 28) dan 1.3.3 (hal 29).

Ruang L^p (hal. 32)

- Untuk $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ adalah ruang linear fungsi terukur $v : \Omega \to \mathbf{R}$ dengan

$$||v||_{p,\Omega} = \left[\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right]^{1/p} < \infty.$$

- Ruang $L^\infty(\Omega)$ berisi semua fungsi terukur yang terbatas esensial pada Ω, dengan norma

$$||v||_{\infty,\Omega} = \text{ess.sup} \{|v(x)| : x \in \Omega\}$$

Ketaksamaan Holder dan ketaksamaan Minkowski (hal. 34)

- Ketaksamaan Holder: Jika u ϵ $L^p(\Omega)$ dan v ϵ $L^q(\Omega)$ dengan $1/p + 1/q = 1$, maka

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq ||u||_{p,\Omega}.||v||_{q,\Omega}.$$

- Ketaksamaan Minkowski: Jika u, v ϵ $L^p(\Omega)$, maka

$$||u + v||_{p,\Omega} \leq ||u||_{p,\Omega} + ||v||_{p,\Omega}.$$

Ruang C_0^∞ (hal. 35)

- Misal Ω buka di $\mathbf{R}^d$. Ruang $C^m(\Omega)$ adalah ruang fungsi yang mempunyai turunan ke-m yang kontinu pada Ω. Ruang $C^\infty(\Omega)$ adalah irisan dari semua $C^m(\Omega)$, $m = 0, \ldots, \infty$.
- Diberikan fungsi v pada Ω, kita definisikan

$$\text{support } v = \text{closure}\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}.$$

- Ruang $C_0^\infty(\Omega)$ berisi semua $v \in C^\infty(\Omega)$ dengan support kompak di Ω.

Teorema (hal. 35):

$C_0^\infty(\Omega)$ padat di $L^p(\Omega)$ utk $1 \leq p < \infty$.