ANALISIS NUMERIK LANJUT

Hendra Gunawan, Ph.D.

2006/2007

BAB II. OPERATOR LINEAR PADA RUANG BERNORMA

Operator linear sering digunakan dalam perumusan masalah matematika, dalam bentuk persamaan untuk diselesaikan atau fungsi untuk dioptimumkan. Selain kelinearan, perlu dipelajari sifat lainnya.

→ Kemiripan dengan masalah yang penyelesaiannya diketahui.

→ Kemiripan dengan masalah ber-dimensi hingga.

Operator

- Operator = pemetaan, transformasi, fungsi, fungsional (bergantung pada domain dan kodomainnya).
- Operator $T : V \rightarrow W$ dikatakan *satu-ke-satu* atau *injektif* jhj $v_1 \neq v_2 \rightarrow T(v_1) \neq T(v_2)$.
- Jika T memetakan V *pada* W atau Ran(T) = W, maka T dikatakan *surjektif*.
- Jika T injektif dan surjektif, maka T dikatakan *bijektif* dan T disebut *bijeksi*.
- Jika T bijektif, maka *invers* dari T, yakni $T^{-1}: W \rightarrow V$, dapat didefinisikan melalui

$$v = T^{-1}(w) \leftrightarrow w = T(v).$$

Beberapa Contoh

1. Misal V ruang vektor. *Operator identitas* $I : V \rightarrow V$ didefinisikan dengan $I(v) = v$ untuk tiap v di V.
2. Misal $V = \mathbf{C}^n$, $W = \mathbf{C}^m$, dan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Operator $L : V \rightarrow W$ yang didefinisikan dengan $L(v) = Av$ dikenal sebagai *operator perkalian dengan A*.
   Di sini L injektif jhj rank(A) = n; surjektif jhj rank(A) = m.
3. Misal $V = C^1[0,1]$ dan $W = C[0,1]$. *Operator turunan* $d/dx : V \rightarrow W$ didefinisikan dengan $dv/dx = v'$.
   Di sini d/dx bersifat surjektif, namun tidak injektif.
4. Operator $D : v(x) \rightarrow [v'(x), v(0)]$ merupakan bijeksi dari $V = C^1[0,1]$ ke $W = C[0,1] \times \mathbf{R}$.

Kekontinuan Operator

Misal V dan W ruang bernorma.

- Operator $T : V \rightarrow W$ dikatakan *kontinu di v* di V jika $v_n \rightarrow v$ di V mengakibatkan $T(v_n) \rightarrow T(v)$ di W. Operator T dikatakan *kontinu* jika ia kontinu di v untuk tiap $v \in V$.
- Operator T dikatakan *terbatas* jika untuk sebarang $r > 0$ terdapat $R > 0$ sehingga $||v|| \leq r$ mengakibatkan $||T(v)|| \leq R$.

- **Contoh**: Operator d/dx : $C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$ merupakan operator kontinu, dengan catatan bahwa norma di $C^1[0,1]$ didefinisikan sbg $||v||_{C'[0,1]} = ||v||_{C[0,1]} + ||v'||_{C[0,1]}$.

- **Latihan**: Tunjukkan bahwa d/dx terbatas.

Operator Linear Kontinu

Misal V dan W ruang linear atas lapangan K.

- Operator $L : V \rightarrow W$ dikatakan linear jhj

  $$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)$$

  untuk tiap v_1, v_2 di V dan α_1, α_2 di K.

  Untuk operator linear L, kita tulis L(v) sbg Lv.

- **Proposisi 1**: Misal V dan W ruang bernorma dan $L : V \rightarrow W$ operator linear. Maka, L kontinu jika dan hanya jika L kontinu di 0.

- **Proposisi 2**: Misal V dan W ruang bernorma dan L : V → W operator linear. Maka, L terbatas jika dan hanya jika terdapat konstanta $k \geq 0$ sehingga

  $||Lv||_W \leq k.||u||_V$ untuk tiap $v \in V$.

- **Teorema 3**: Misal V dan W ruang bernorma dan L : V → W operator linear. Maka, L kontinu jhj L terbatas.

Ruang BL(V,W)

$BL(V,W) := \{ L : V \rightarrow W \mid L$ linear dan terbatas $\}$.

Untuk tiap $L \in BL(V,W)$, definisikan

$$\|L\|_{V,W} := \sup \{ \|Lv\|_W : \|v\|_V = 1 \}. \qquad (*)$$

Perhatikan bahwa $\|Lv\|_W \leq \|L\|_{V,W}.\|v\|_V$.

- **Teorema 4**: $(BL(V,W), \|\cdot\|_{V,W})$ merupakan ruang bernorma.

- **Teorema 5**: Misal U, V dan W ruang bernorma, S : U → V dan T : V → W operator linear terbatas. Maka, operator komposisi TS: U → W dengan

$$TS(u) = T(Su) \quad \text{untuk tiap } u \in U$$

merupakan operator linear terbatas. Lebih jauh,

$$\|TS\|_{U,W} \le \|S\|_{U,V}.\|T\|_{V,W}.$$

Ruang BL(V)

Dalam hal V = W, BL(V,W) = BL(V), ruang operator linear terbatas dari V ke V.

- **Akibat 6**: Misal V ruang bernorma dan L є BL(V). Maka, untuk tiap n є N, L^n terdefinisi, linear dan terbatas, dengan

$$||L^n|| \leq ||L||^n.$$

Contoh

1. Misal V ruang bernorma. Maka, operator identitas $I : V \to V$ linear dan terbatas dengan $\| I \| = 1$.
2. Misal $V = \mathbf{C}^n$, $W = \mathbf{C}^m$, dan $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Operator perkalian dengan A, yakni $L(v) = Av$, linear dan terbatas dengan $\| L \| = \| A \|$.
3. Misal $V = W = C[a,b]$ dengan norma $\| \, . \, \|_\infty$. Definisikan $K : V \to W$ dengan

$$(Kv)(x) = \int_{[a,b]} k(x,y)\, v(y)\, dy$$

dengan $k \in C([a,b]^2)$. Maka K linear dan terbatas dengan $\| K \| = \text{maks } \{ \int_{[a,b]} |k(x,y)|\, dy : a \leq x \leq b \}$.

BL(V,W) sebagai ruang Banach

- **Teorema 7**: Misal V ruang bernorma dan W ruang Banach. Maka, BL(V,W) merupakan ruang Banach.

- **Latihan:**

1. Diketahui L : V → W operator linear. Tunjukkan bahwa L(0) = 0.
2. Buktikan bahwa BL(V,W) merupakan ruang linear dan $|| \cdot ||_{V,W}$ yang didefinisikan pada (*) merupakan norma pada BL(V,W).
3. Verifikasi kelinearan, keterbatasan, dan norma operator K pada Contoh 3.