Final Draft
1 Desember 2005

BEBERAPA KONSEP ORTOGONALITAS DI RUANG NORM

Hendra Gunawan, Nursupiamin, dan Eder Kikianty

Ortogonalitas merupakan salah satu konsep penting di ruang hasilkali dalam. Dalam makalah ini akan dibahas bagaimana konsep ortogonalitas dapat dikembangkan di ruang norm, yang secara umum bukan merupakan ruang hasil kali dalam. Lebih jauh akan dikaji sifat-sifat dasar ortogonalitas yang berlaku di ruang norm tersebut.

1. PENDAHULUAN

Di ruang hasilkali dalam $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dua vektor x dan y dikatakan *ortogonal*, ditulis $x \perp y$, jika dan hanya jika $\langle x, y \rangle = 0$. Beberapa sifat dasar ortogonalitas di ruang hasil kali dalam $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ adalah:

1.1 *Nondegenerasi*: Jika $x \perp x$, maka $x = 0$.

1.2 *Simetri*: Jika $x \perp y$, maka $y \perp x$.

1.3 *Homogenitas*: Jika $x \perp y$, maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap α, β skalar.

1.4 *Aditif Kanan*: Jika $x \perp y$ dan $x \perp z$, maka $x \perp (y + z)$.

1.5 *Resolvabilitas*: Untuk setiap $x, y \in X$ terdapat skalar α sedemikian sehingga $x \perp (\alpha x + y)$.

1.6 *Kontinuitas*: Jika $x_n \to x,\ y_n \to y$ (dalam norm) dan $x_n \perp y_n$ untuk setiap n, maka $x \perp y$.

Sekarang misalkan $(X, \|\cdot\|)$ ruang norm. Sebagaimana kita ketahui, tidak setiap ruang norm merupakan ruang hasilkali dalam. Sebagai contoh, ruang $\ell^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, yang beranggotakan semua barisan bilangan real $x := (\xi_k)$ dengan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$, merupakan ruang norm dengan norm $\|x\|_p := \Big[\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\Big]^{1/p}$, tetapi bukan merupakan ruang hasilkali dalam, kecuali untuk $p = 2$.

Kata kunci: Ortogonalitas, ruang norm, ruang hasilkali dalam.

Di ruang norm kita dapat berbicara tentang panjang sebuah vektor dan jarak antara dua titik. Dalam makalah ini akan dibahas bagaimana kita dapat mengembangkan sejumlah konsep ortogonalitas antara dua vektor di sana. Tentu saja tidak semua sifat ortogonalitas yang berlaku di ruang hasilkali dalam akan berlaku pula di ruang norm. Karena itu sifat-sifat ortogonalitas yang masih tetap berlaku di ruang norm akan dikaji.

Hasil penelitian terdahulu tentang ortogonalitas di ruang norm dapat dilihat di [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]. Makalah ini merupakan pengembangan dari Tesis S2 penulis kedua dan Skripsi S1 penulis ketiga.

2. ORTOGONALITAS-P, -I, DAN -BJ

Untuk selanjutnya, $(X, \|\cdot\|)$ menyatakan ruang norm atas lapangan real, kecuali bila ada keterangan lain. Konsep ortogonalitas-P, ortogonalitas-I, dan ortogonalitas-BJ berikut telah dikenal cukup lama:

2.1 *Ortogonalitas-P*: x dikatakan ortogonal-P ke y (ditulis $x \perp_{\rm P} y$) jika dan hanya jika

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2.2 *Ortogonalitas-I*: x dikatakan ortogonal-I ke y (ditulis $x \perp_{\rm I} y$) jika dan hanya jika

$$\|x+y\| = \|x-y\|.$$

2.3 *Ortogonalitas-BJ*: x dikatakan ortogonal-BJ ke y (ditulis $x \perp_{\rm BJ} y$) jika dan hanya jika

$$\|x+\alpha y\| \geq \|x\| \text{ untuk setiap } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(P untuk Pythagoras, I untuk *isosceles*, dan BJ untuk Birkhoff-James.)

Catat bahwa di ruang hasilkali dalam, ortogonalitas $x \perp_{\rm P} y$, $x \perp_{\rm I} y$, dan $x \perp_{\rm BJ} y$ ekuivalen dengan ortogonalitas biasa $x \perp y$. Ekuivalensi $x \perp_{\rm P} y$, $x \perp_{\rm I} y$, dan $x \perp y$ mudah diperiksa. Untuk membuktikan ekuivalensi ortogonalitas-BJ dan ortogonalitas biasa di ruang hasilkali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, pertama misalkan diketahui $x \perp y$ atau $\langle x, y\rangle = 0$. Maka, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\|x+\alpha y\|^2 = \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \|x\|^2 + \alpha^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

sehingga

$$\|x+\alpha y\| \geq \|x\|.$$

Ini menunjukkan bahwa $x \perp_{\rm BJ} y$. Sebaliknya, misalkan diketahui $x \perp_{\rm BJ} y$. Maka, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$, yang ekuivalen dengan

$$2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Ini terjadi hanya jika $\langle x, y\rangle^2 \leq 0$, yakni hanya jika $\langle x, y\rangle = 0$.

Contoh berikut memperlihatkan bahwa di ruang norm yang bukan merupakan ruang hasilkali dalam, ortogonalitas yang satu tidak mengakibatkan ortogonalitas yang lainnya.

Contoh 2.4 Misalkan $X = \ell^1$, yang dilengkapi dengan norm $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$.

(a) Ambil $x = (3, 6, 0, \dots)$ dan $y = (8, -4, 0, \dots)$. Maka, $x \perp_{\mathrm{P}} y$ tetapi $x \not\perp_{\mathrm{I}} y$ dan $x \not\perp_{\mathrm{BJ}} y$.
(b) Ambil $x = (1, 1, 0, \dots)$ dan $y = (2, -1, 0, \dots)$. Maka, $x \perp_{\mathrm{I}} y$ tetapi $x \not\perp_{\mathrm{P}} y$ dan $x \not\perp_{\mathrm{BJ}} y$.
(c) Ambil $x = (1, 0, 0, \dots)$ dan $y = (-1, 1, 0, \dots)$. Maka, $x \perp_{\mathrm{BJ}} y$ tetapi $x \not\perp_{\mathrm{P}} y$ dan $x \not\perp_{\mathrm{I}} y$.

Selanjutnya kita kaji sifat-sifat ortogonalitas-P, ortogonalitas-I, dan ortogonalitas-BJ.

Fakta 2.5 Ortogonalitas-P memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan kontinuitas.

Bukti. Misalkan $x \perp_{\mathrm{P}} x$. Maka $2\|x\|^2 = 0$, dan karenanya $x = 0$. Jadi ortogonalitas-P memenuhi sifat nondegenerasi. Sekarang misalkan $x \perp_{\mathrm{P}} y$. Maka $\|y - x\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2$, dan karenanya $y \perp_{\mathrm{P}} x$. Jadi ortogonalitas-P memenuhi sifat simetri. Selanjutnya misalkan $x_n \to x$, $y_n \to y$, dan $x_n \perp_{\mathrm{P}} y_n$ untuk setiap n. Maka, mengingat bahwa norm $\|\cdot\|$ merupakan pemetaan yang kontinu, kita peroleh

$$\|x - y\|^2 = \lim \|x_n - y_n\|^2 = \lim(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

yang berarti $x \perp_{\mathrm{P}} y$. Jadi ortogonalitas-P memenuhi sifat kontinuitas. □

Contoh 2.6 Ortogonalitas-P tidak memenuhi sifat homogenitas dan aditif kanan. Di ℓ^1, ambil $x = (3, 6, 0, \dots)$ dan $y = (8, -4, 0, \dots)$. Maka, $x \perp_{\mathrm{P}} y$ tetapi $x \not\perp_{\mathrm{P}} 2y$.

Fakta 2.7 Ortogonalitas-I memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan kontinuitas.

Bukti. Misalkan $x \perp_{\mathrm{I}} x$. Maka $2\|x\| = 0$, dan karenanya $x = 0$. Jadi ortogonalitas-I memenuhi sifat nondegenerasi. Kemudian, karena $\|x + y\| = \|y + x\|$ dan $\|x - y\| = \|y - x\|$, ortogonalitas-I memenuhi sifat simetri. Selanjutnya misalkan $x_n \to x$, $y_n \to y$, dan $x_n \perp_{\mathrm{I}} y_n$ untuk setiap n. Maka, mengingat bahwa norm $\|\cdot\|$ merupakan pemetaan yang kontinu, kita peroleh

$$\|x + y\| = \lim \|x_n + y_n\| = \lim \|x_n - y_n\| = \|x - y\|,$$

yang berarti $x \perp_{\mathrm{I}} y$. Jadi ortogonalitas-I memenuhi sifat kontinuitas. □

Contoh 2.8 Ortogonalitas-I tidak memenuhi sifat homogenitas dan aditif kanan. Di ℓ^1, ambil $x = (2, 1, 0, \dots)$ dan $y = (1, -2, 0, \dots)$. Maka, $x \perp_{\mathrm{I}} y$ tetapi $x \not\perp_{\mathrm{I}} 2y$.

Fakta 2.9 Ortogonalitas-BJ memenuhi sifat nondegenerasi, homogenitas, dan kontinuitas.

Bukti. Misalkan $x \perp_{\mathrm{BJ}} x$. Maka $\|x + \alpha x\|^2 \geq \|x\|^2$ atau $(1 + \alpha)^2\|x\|^2 \geq \|x\|^2$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Ketaksamaan ini berlaku hanya jika $x = 0$. Jadi ortogonalitas-BJ memenuhi sifat nondegenerasi. Sekarang misalkan $x \perp_{\rm BJ} y$. Maka, untuk $\alpha, \beta \neq 0$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ sebarang, kita peroleh

$$\|\alpha x + \lambda\beta y\| = |\alpha|.\|x + \gamma y\| \geq |\alpha|.\|x\| = \|\alpha x\|$$

(dengan $\gamma = \frac{\lambda\beta}{\alpha}$), yang berarti $\alpha x \perp_{\rm BJ} \beta y$. Jadi ortogonalitas-BJ memenuhi sifat homogenitas. Selanjutnya misalkan $x_n \to x$, $y_n \to y$, dan $x_n \perp_{\rm BJ} y_n$ untuk setiap n. Maka, mengingat bahwa norm $\| \cdot \|$ merupakan pemetaan yang kontinu, kita peroleh

$$\|x + \alpha y\| = \lim \|x_n + \alpha y_n\| \geq \lim \|x_n\| = \|x\|$$

untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, yang berarti $x \perp_{\rm BJ} y$. Jadi ortogonalitas-I memenuhi sifat kontinuitas. □

Contoh 2.10 Ortogonalitas-BJ tidak memenuhi sifat simetri dan aditif kanan. Di ℓ^1, ambil $x = (2, -1, 0 \dots)$ dan $y = (1, 1, 0, \dots)$. Maka, $x \perp_{\rm BJ} y$ tetapi $y \not\perp_{\rm BJ} x$. Selanjutnya, ambil $x = (2, 0, 0, \dots)$, $y = (1, 1, 0, \dots)$, dan $z = (0, -1, 0, \dots)$. Maka, $x \perp_{\rm BJ} y$ dan $x \perp_{\rm BJ} z$, tetapi $x \not\perp_{\rm BJ} (y + z)$.

Sifat resolvabilitas ortogonalitas-P, -I, dan -BJ sulit diperiksa. Apakah sifat ini dipenuhi atau tidak oleh ketiga ortogonalitas tersebut belum diketahui hingga saat makalah ini ditulis. (Sebagai ilustrasi, diberikan dua vektor x dan y di ℓ^1, kami belum menemukan cara bagaimana memperoleh $\alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\|x + \alpha x + y\| = \|x - \alpha x - y\|$.)

3. ORTOGONALITAS-g DAN -D

Selain ortogonalitas-P, -I, dan -BJ, terdapat ortogonalitas lainnya, di antaranya adalah ortogonalitas-g yang diperkenalkan oleh Miličić [7] dan ortogonalitas-D yang diperkenalkan oleh Diminnie [4].

Sebelum mendefinisikan ortogonalitas-g, definisikan terlebih dahulu fungsional $g : X^2 \to \mathbb{R}$ sebagai

$$g(x, y) := \frac{\|x\|}{2}[\tau_+(x, y) + \tau_-(x, y)]$$

dengan $\tau_\pm(x, y) := \lim\limits_{t\to\pm 0} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$. Dapat diperiksa bahwa g memenuhi:

(a) $g(x, x) = \|x\|^2$ for all $x \in X$;
(b) $g(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta g(x, y)$ for all $x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
(c) $g(x, x + y) = \|x\|^2 + g(x, y)$ for all $x, y \in X$;
(d) $|g(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ for all $x, y \in X$.

Jika, sebagai tambahan, fungsional $g(x, y)$ linear terhadap $y \in X$, maka g disebut *semi hasilkali dalam* pada X. Sebagai contoh, fungsional

$$g(x, y) := \|x\|_p^{2-p} \sum_k |\xi_k|^{p-1}\text{sgn}(\xi_k)\eta_k, \quad x = (\xi_k),\ y = (\eta_k) \in \ell^p,$$

merupakan suatu semi hasilkali dalam pada ℓ^p, $1 \leq p < \infty$. Di ruang hasilkali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, fungsional $g(\cdot,\cdot)$ identik dengan hasilkali dalam $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3.1 *Ortogonalitas-g*: Misalkan g adalah suatu semi hasilkali dalam pada X. Maka, x dikatakan ortogonal-g ke y, ditulis $x \perp_g y$, jika dan hanya jika $g(x,y) = 0$.

Fakta 3.2 Ortogonalitas-g memenuhi sifat nondegenerasi, homogen, aditif kanan, dan resolvabilitas.

Bukti. Misalkan $x \perp_g x$ atau $g(x,x) = 0$. Maka $\|x\|^2 = 0$, dan karenanya $x = 0$. Jadi ortogonalitas-g memenuhi sifat nondegenerasi. Selanjutnya, jika $x \perp_g y$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka $g(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta g(x,y) = 0$, yang berarti $\alpha x \perp_g \beta y$. Jadi ortogonalitas-g memenuhi sifat homogen. Kemudian karena $g(x,y)$ linear terhadap $y \in X$, ortogonalitas-g memenuhi sifat aditif kanan. Terakhir, misalkan x dan y dua vektor tak nol di X dan $g(x,y) \neq 0$. Maka, untuk $\alpha = -\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}$, kita mempunyai

$$g(x, \alpha x + y) = \alpha^{-1} g(\alpha x, \alpha x + y) = \alpha\|x\|^2 + g(x,y) = 0.$$

Ini menunjukkan bahwa ortogonalitas-g memenuhi sifat resolvabilitas. □

Karena secara umum $g(x,y) \neq g(y,x)$, ortogonalitas-g tidak memenuhi sifat simetri, yakni $x \perp_g y$ tidak mengakibatkan $y \perp_g x$, sebagaimana diperlihatkan oleh contoh berikut.

Contoh 3.3 Di ℓ^1 dengan $g(x,y) := \|x\|_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{sgn}(\xi_k)\eta_k$, ambil $x = (-1, 2, 0\ldots)$ dan $y = (1, 1, 0, \ldots)$. Maka, $x \perp_g y$ tetapi $y \perp_g x$.

Ortogonalitas-g juga tidak memenuhi sifat kontinuitas, sebagaimana diperlihatkan oleh contoh berikut.

Contoh 3.4 Di ℓ^1 dengan $g(x,y) := \|x\|_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{sgn}(\xi_k)\eta_k$, ambil $x_n = (-\frac{1}{n}, 1, 0, \ldots)$, $x = (0, 1, 0\ldots)$ dan $y = (1, 1, 0, \ldots)$. Maka dapat diperiksa bahwa $x_n \to x$ dalam norm, $x_n \perp_g y$ untuk setiap n, tetapi $x \not\perp_g y$.

Walaupun demikian, kita mempunyai fakta berikut tentang kontinuitas $\perp_g$ terhadap komponen kedua.

Fakta 3.5 Jika $y_n \to y$ (dalam norm) dan $x \perp_g y_n$ untuk setiap n, maka $x \perp_g y$.

Bukti. Jika $y_n \to y$ (dalam norm) dan $x \perp_g y_n$ untuk setiap n, maka

$$|g(x,y)| = |g(x,y) - g(x,y_n)| = |g(x, y - y_n)| \leq \|x\|.\|y - y_n\|.$$

Karena $\|y - y_n\| \to 0$, kita peroleh $g(x,y) = 0$ atau $x \perp_g y$. □

Sekarang kita akan mendefinisikan ortogonalitas-D. Untuk itu, kita perkenalkan terlebih dahulu konsep norm-2, yang pertama kali diperkenalkan oleh Gähler pada 1960-an [5]. Misalkan $\dim(X) \geq 2$. Pemetaan $\|\cdot,\cdot\| : X^2 \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

(e) $\|x, y\| \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$; $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linear;

(f) $\|x,y\| = \|y,x\|$ untuk setiap $x, y \in X$;
(g) $\|x,\alpha y\| = |\alpha|\|x,y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
(h) $\|x,y+z\| \le \|x,y\| + \|x,z\|$ untuk setiap $x, y, z \in X$,

disebut *norm-2* pada X, dan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut *ruang norm-2*. Sebagai contoh, pemetaan

$$\|x,y\| := \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

merupakan norm-2 baku pada ruang hasilkali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Secara geometris, $\|x,y\|$ merepresentasikan luas jajarangenjang yang direntang oleh x dan y di X.

Dengan menggunakan norm-2, kita dapat mendefinisikan ortogonalitas-D sebagai berikut.

3.6 *Ortogonalitas-D*: Misalkan X ruang norm yang juga dilengkapi dengan norm-2. Maka, x dikatakan ortogonal-D ke y, ditulis $x \perp_{\mathrm{D}} y$, jika dan hanya jika $\|x,y\| = \|x\|.\|y\|$.

Di ruang hasilkali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ yang juga dilengkapi dengan norm-2 baku, dapat diperiksa bahwa $x \perp_{\mathrm{D}} y$ jika dan hanya jika $\langle x,y\rangle = 0$, yakni jika dan hanya jika $x \perp y$.

Fakta 3.7 Ortogonalitas-D memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan homogen.

Bukti. Misalkan $x \perp_{\mathrm{D}} x$. Maka $\|x\|^2 = 0$, dan karenanya $x = 0$. Jadi ortogonalitas-D memenuhi sifat nondegenerasi. Karena norm-2 bersifat simetri, ortogonalitas-D juga memenuhi sifat simetri. Selanjutnya, misalkan $x \perp_{\mathrm{D}} y$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Maka

$$\|\alpha x, \beta y\| = |\alpha|.|\beta|.\|x,y\| = |\alpha|.|\beta|.\|x\|.\|y\| = \|\alpha x\|.\|\beta y\|,$$

yang berarti $\alpha x \perp_{\mathrm{D}} \beta y$. Jadi ortogonalitas-D memenuhi sifat homogen. $\square$

Sifat aditif kanan dan kontinuitas ortogonalitas-D sulit diperiksa mengingat norm-2 $\|\cdot,\cdot\|$ bukan merupakan pemetaan linear terhadap kedua peubahnya. Namun demikian, kita mempunyai fakta berikut tentang kontinuitas ortogonalitas-D.

Fakta 3.8 Jika terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\|x,y\| \le C\|x\|.\|y\|$ untuk setiap x dan y, maka ortogonalitas-D memenuhi sifat kontinuitas.

Bukti. Misalkan $x_n \to x$ dan $y_n \to y$, dan $x_n \perp_{\mathrm{D}} y_n$ untuk setiap n. Untuk menunjukkan bahwa $x \perp_{\mathrm{D}} y$, pertama perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \big|\|x_n,y_n\| - \|x,y\|\big| &\le \big|\|x_n,y_n\| - \|x_n,y\|\big| + \big|\|x_n,y\| - \|x,y\|\big| \\ &\le \|x_n, y_n - y\| + \|x_n - x, y\| \\ &\le C\left[\|x_n\|.\|y_n - y\| + \|x_n - x\|.\|y\|\right], \end{aligned}$$

yang mengakibatkan $\|x_n,y_n\| \to \|x,y\|$. Dengan demikian

$$\|x,y\| = \lim \|x_n,y_n\| = \lim \|x_n\|.\|y_n\| = \|x\|.\|y\|,$$

yang berarti $x \perp_{\mathrm{D}} y$. Jadi ortogonalitas-D memenuhi sifat kontinuitas. $\square$

Catat bahwa di ruang hasilkali dalam X yang dilengkapi dengan norm-2 baku, ketaksamaan $\|x,y\| \le \|x\|.\|y\|$ berlaku untuk setiap $x, y \in X$, sehingga ortogonalitas-D di sana memenuhi sifat kontinuitas.

Ucapan Terima Kasih. Makalah ini merupakan hasil penelitian yang didanai oleh Program Riset ITB 2005.

REFERENCES

1. J. Alonso, "Uniqueness properties of isosceles orthogonality in normed linear spaces", *Ann. Sci. Math. Québec* **18(1)** (1994), 25–38.
2. C. Alsina, P. Cruells and M.S. Tomas, "Isosceles trapezoids, norm and inner products", *Arch. Math.* **72** (1999), 233–240.
3. J. Desbiens, "Caractérisation d'un espace préhilbertien au moyen de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James", *Ann. Sc. Math. Québec* **11(2)** (1987), 295–303.
4. C.R. Diminnie, "A new orthogonality relation for normed linear spaces", *Math. Nachr.* **114** (1983), 197–203.
5. S. Gähler, "Lineare 2-normierte räume", *Math. Nachr.* **28** (1964), 1–43.
6. P. Guijarro and M.S. Tomas, "Perpendicular bisector and orthogonality", *Arch. Math.* **69** (1997), 491–496.
7. P.M. Miličić, "On the Gram-Schmidt projection in normed spaces", *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* **9** (1998), 75–78.
8. J.R. Partington, "Orthogonality in normed spaces", *Bull. Austral. Math. Soc.* **33** (1986), 449–455.
9. I. Şerb, "Rectangular modulus, Birkhoff orthogonality and characterizations of inner product spaces", *Comment. Math. Univ. Carolinae* **40** (1999), 107–119.

H. Gunawan, E. Kikianty: Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung, Bandung 40132.
E-mail: hgunawan@math.itb.ac.id, ederkikianty@students.math.itb.ac.id.

Nursupiamin: Departemen Matematika, Universitas Tadulako, Palu. (Lulusan Program Magister Matematika ITB Tahun 2005)