Catatan Kuliah
MA1123
Kalkulus Elementer I

Oleh

Hendra Gunawan, Ph.D.

Departemen Matematika ITB

Sasaran Belajar

Setelah mempelajari materi Kalkulus Elementer I, mahasiswa diharapkan memiliki (terutama):

- Keterampilan dasar kalkulus yang didukung oleh konsep, metode, dan penalaran yang memadai;
- Kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
- Kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan dengan kalkulus;
- Kesiapan untuk mempelajari matakuliah lain yang memerlukan kalkulus sebagai prasyarat.

Materi dan Buku Rujukan

- Bab I. Pendahuluan
- Bab II. Fungsi dan Limit
- Bab III. Turunan
- Bab IV. Penggunaan Turunan
- Bab V. Integral
- Bab VI. Penggunaan Integral

Buku Rujukan: Purcell & Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid 1, edisi ke-5 (terjemahan I N. Susila & B. Kartasasmita), Penerbit Erlangga, 1992.

BAB I. PENDAHULUAN

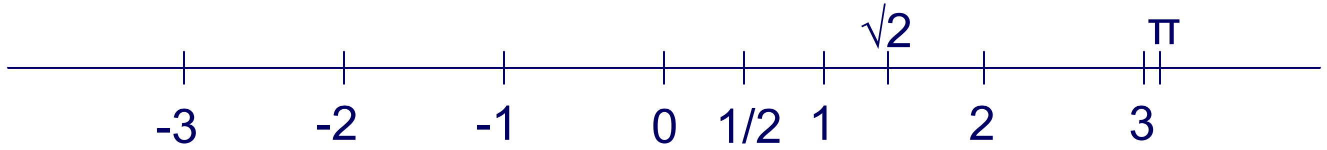
- Bilangan Real dan Notasi Selang
- Pertaksamaan
- Nilai Mutlak
- Sistem Koordinat Cartesius dan Grafik Persamaan

Bilangan Real dan Notasi Selang

Bilangan real meliputi bilangan *rasional* (seperti ½ dan 2) dan *irasional* (seperti $\sqrt{2}$ dan π). Bilangan rasional meliputi semua bilangan *bulat* (*positif, nol*, dan *negatif*) dan *pecahan murni*. Himpunan semua bilangan real dilambangkan dengan **R**.

Bilangan real memenuhi *sifat aljabar* (terhadap operasi penjumlahan dan perkalian), *sifat urutan* (tentang $<$, $=$, dan $>$), dan *sifat kelengkapan*. Sifat kelengkapan memungkinkan kita menyatakan **R** sebagai suatu garis (yang tak berlubang), yang disebut *garis bilangan real*.

Garis bilangan real



Pada garis bilangan real, setiap titik menyatakan sebuah bilangan real. Sebaliknya, setiap bilangan real dapat dinyatakan sebagai sebuah titik pada garis bilangan real. (Sebagai perbandingan, himpunan semua bilangan rasional tidak dapat dinyatakan sebagai sebuah garis.)

Untuk selanjutnya, **R** menjadi himpunan semesta kita.

Notasi *selang* di bawah ini akan sering dipakai:

$$(a,b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \}$$
$$[a,b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

$$[a,b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b \}$$
$$(a,b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b \}$$

$$(-\infty,b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid x < b \}$$
$$(-\infty,b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \leq b \}$$

$$(a,\infty) = \{ x \in \mathbf{R} \mid x > a \}$$
$$[a,\infty) = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \geq a \}$$

Pertaksamaan

Dalam kalkulus, kita sering kali menghadapi suatu *pertaksamaan* (dalam x), seperti $x^2 < x$.

Menyelesaikan suatu pertaksamaan dalam x berarti menentukan himpunan semua nilai x yang ‘memenuhi’ pertaksamaan tersebut (yang membuat pertak-samaan tersebut menjadi suatu *ketaksamaan* yang benar).

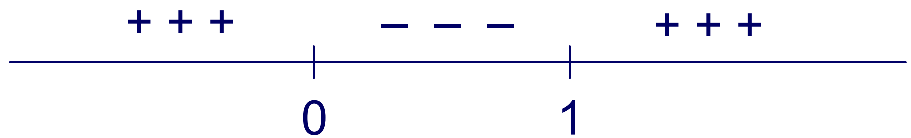
Himpunan semua nilai x yang memenuhi suatu per-taksamaan disebut sebagai *himpunan penyelesaian* pertaksamaan tersebut.

Contoh 1. Selesaikan pertaksamaan $x^2 < x$.

<u>Jawab</u>. Kita akan menyelesaikan pertaksamaan di atas dengan menggunakan sifat-sifat aljabar dan urutan bilangan real. Perhatikan bahwa

$$x^2 < x \;\leftrightarrow\; x^2 - x < 0 \;\leftrightarrow\; x(x-1) < 0.$$

Pembuat nol dari $x(x-1)$ adalah 0 dan 1. Tanda dari $x(x-1)$ pada garis bilangan real adalah



Kita sedang mencari nilai x yang membuat $x(x - 1) < 0$ (yakni, yang membuat $x(x - 1)$ bernilai negatif). Karena itu, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \in \mathbf{R} | 0 < x < 1\}$ atau selang $(0,1)$.

Catatan. Lambang $\leftrightarrow$ berarti 'setara dengan'. Dua pernyataan setara apabila kebenaran pernyataan yang satu mengakibatkan kebenaran pernyataan lainnya.

Latihan. Selesaikan pertaksamaan berikut:

1. $1/x < 2$.
2. $x^3 \geq x$.

Nilai Mutlak

Lambang $|\,x\,|$ menyatakan *nilai mutlak* bilangan x, yang didefinisikan sebagai

$$|\,x\,| = \begin{cases} x, & \text{jika } x > 0, \\ 0, & \text{jika } x = 0, \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Jelas bahwa $|\,x\,| \geq 0$ untuk sebarang $x \in \mathbf{R}$. Selain itu, $|\,xy\,| = |\,x\,|.|\,y\,|$, $|\,x/y\,| = |\,x\,|/|\,y\,|$, dan $|\,x + y\,| \leq |\,x\,| + |\,y\,|$ untuk setiap $x, y \in \mathbf{R}$. Juga, $|\,x\,|^2 = x^2$ (jadi, $|\,x\,| = \sqrt{x^2}$); $|\,x\,| < a \leftrightarrow -a < x < a$; dan $|\,x\,| < |\,y\,| \leftrightarrow x^2 < y^2$.

Berikut adalah soal pertaksamaan dengan nilai mutlak.

Contoh 2. Selesaikan pertaksamaan $| 1/x - 3 | > 6$.

Jawab: $| 1/x - 3 | > 6 \leftrightarrow | (1 - 3x)/x | > 6$

$$\leftrightarrow | 1 - 3x |/| x | > 6$$

$$\leftrightarrow | 1 - 3x | > 6.| x | \quad (x \neq 0)$$

$$\leftrightarrow (1 - 3x)^2 > 36x^2$$

$$\leftrightarrow 27x^2 + 6x - 1 < 0$$

$$\leftrightarrow (9x - 1)(3x + 1) < 0$$

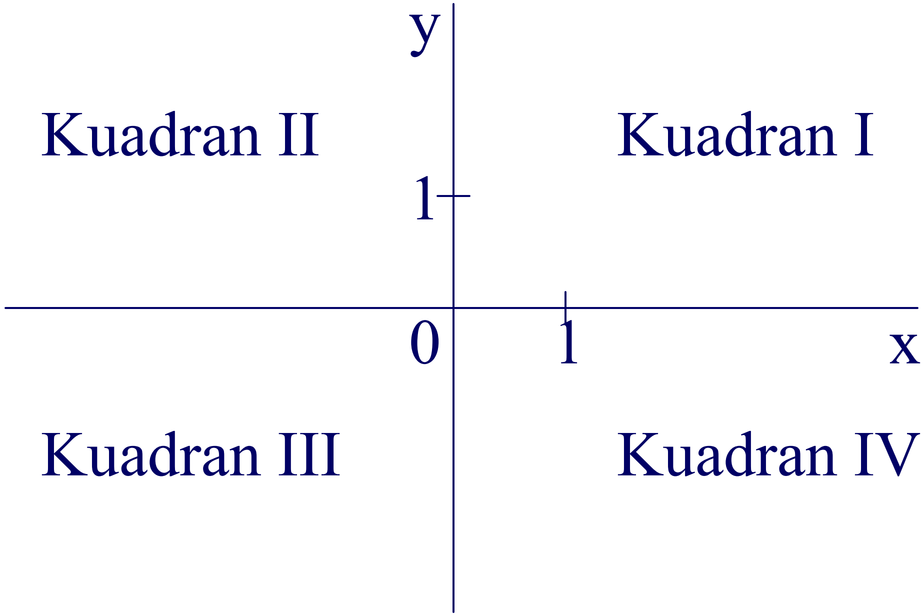
$$\leftrightarrow -1/3 < x < 9.$$

Mengingat $x \neq 0$, himpunan penyelesaiannya adalah $(-1/3,0) \cup (0,1/9)$.

Latihan. Selesaikan pertaksamaan $| x - 1 | < 2| x + 1 |$.

Sistem Koordinat Cartesius dan Grafik Persamaan

Sistem koordinat Cartesius untuk bidang terdiri dari dua *sumbu koordinat*, sumbu x dan sumbu y, yang saling tegak lurus dan berpotongan di *titik asal* (0,0).



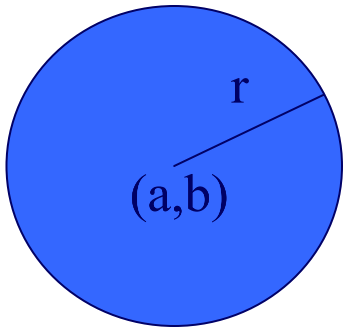
Bidang Cartesius terbagi atas empat *kuadran*. Setiap titik pada bidang Cartesius dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan (x,y), dan sebaliknya pasangan bilangan (x,y) menyatakan titik tertentu pada bidang.

Jarak antara dua titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ adalah

$$d(P,Q) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}.$$

Persamaan *lingkaran* yang berpusat di (a,b) dan berjari-jari r pada bidang adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



Persamaan umum *garis lurus* pada bidang adalah

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0,$$

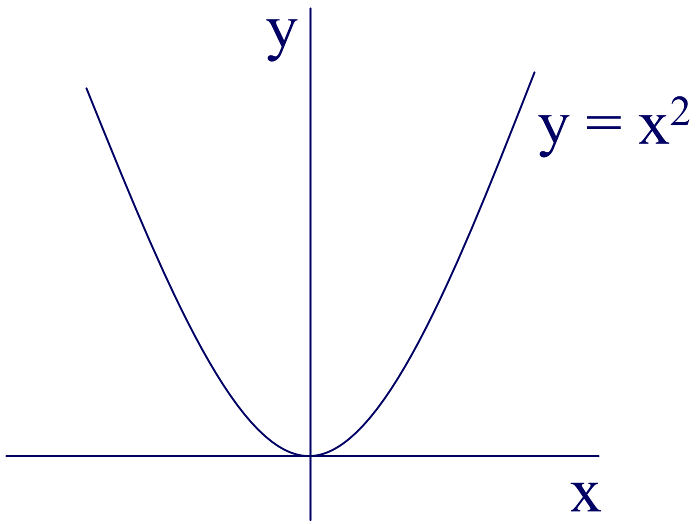
dengan A, B tak keduanya nol. Jika $\mathrm{B} \neq 0$, persamaan tadi dapat dinyatakan sebagai

$$y = mx + c,$$

dengan *m* menyatakan *gradien* atau *kemiringan* garis tersebut. Persamaan garis lurus yang melalui $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ dengan gradien m adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Diberikan suatu persamaan (dalam x dan y), seperti $y = x^2$, kita dapat menggambar *grafik*nya pada bidang Cartesius. Perhatikan bahwa grafik $y = x^2$ simetris terhadap sb-y.



Latihan. Gambar grafik persamaan berikut:

1. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.
2. $3x - 5y = 10$.
3. $x = y^2$.

SOAL-SOAL BAB I
(dari buku Purcell & Varberg "Kalkulus dan Geometri Analitis" jilid I, edisi V)

1.2 no. 15, 17.
1.3 no. 3, 7, 13, 17, 21, 29.
1.4 no. 3, 11, 17, 21, 25, 34.
1.5 no. 7, 10, 12.
1.6 no. 9, 13, 17, 23, 25.
1.7 no. 1, 7, 11, 17, 19.

BAB II. FUNGSI, LIMIT, DAN KEKONTINUAN

- Fungsi dan Operasi pada Fungsi
- Beberapa Fungsi Khusus
- Limit dan Limit Sepihak
- Teorema Dasar Limit
- Kekontinuan dan Teorema Nilai Antara

Fungsi dan Operasi pada Fungsi

Dalam matematika, yang dimaksud dengan *fungsi* adalah aturan yang *memetakan* setiap objek x di suatu himpunan D (*daerah asal*) ke sebuah objek tunggal y di himpunan E (*daerah hasil*). Fungsi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti f atau g. Lambang

$$f : D \rightarrow E.$$

berarti f adalah fungsi dari D ke E. Fungsi yang akan dibahas di sini adalah fungsi dengan daerah asal D□**R** dan daerah hasil E□**R**, yang sering dinyatakan dalam bentuk persamaan seperti $y = x^2$ atau

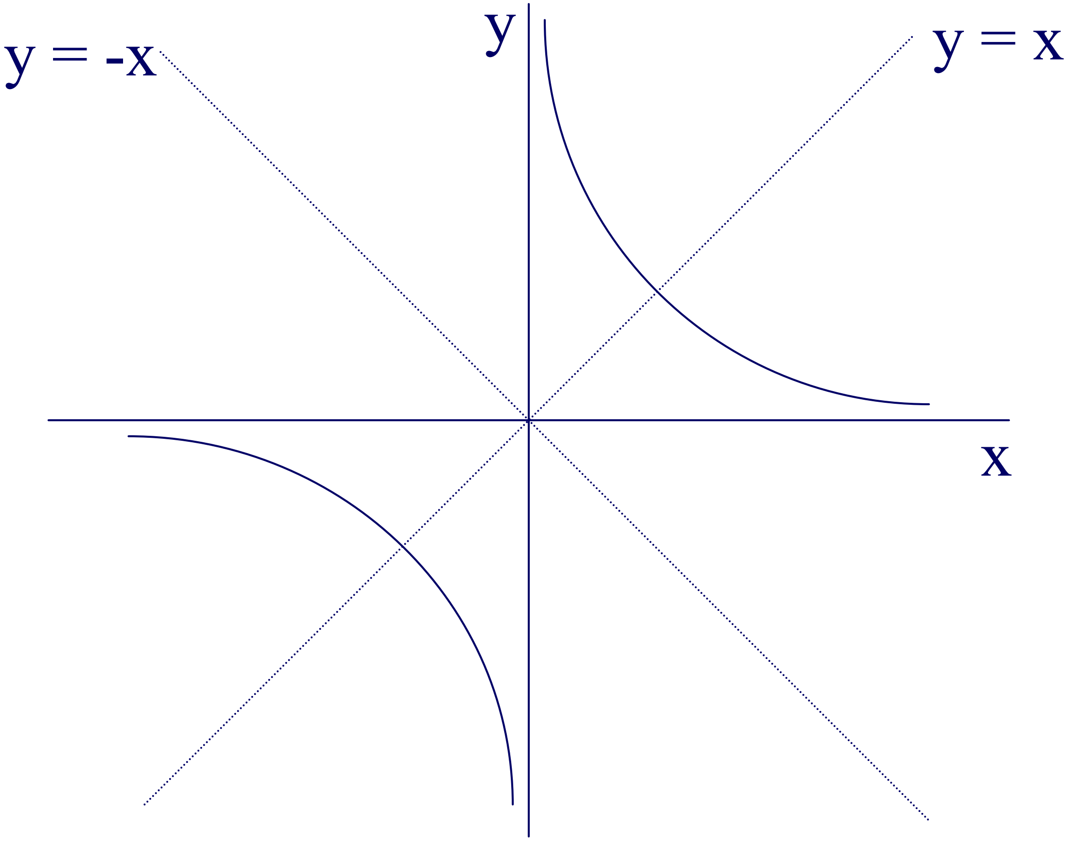
$$f(x) = x^2, \ x \in \mathbf{R}.$$

Contoh 1. Fungsi $f(x) = x^2$ memetakan setiap bilangan real x ke kuadratnya, yakni x^2. Daerah asalnya adalah **R** dan daerah hasilnya adalah $[0,\infty)$.

Contoh 2. Fungsi $g(x) = 1/x$ memetakan setiap bilangan real $x \neq 0$ ke kebalikannya, yakni $1/x$. Daerah asalnya sama dengan daerah hasilnya, yaitu $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$.

Grafik fungsi f adalah grafik persamaan $y = f(x)$ pada sistem koordinat Cartesius atau bidang-xy. Sebagai contoh, grafik fungsi $f(x) = x^2$ adalah *parabola* yang telah digambar sebelumnya.

Sementara itu, grafik fungsi $g(x) = 1/x$ berbentuk *hiper-bola* dengan sumbu simetri garis $y = x$ dan $y = -x$.



Seperti halnya pada bilangan, kita definisikan operasi *penjumlahan*, *pengurangan*, *perkalian*, dan *pembagian* pada fungsi, sebagai berikut:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

asalkan bentuk di ruas kanan terdefinisi. Sebagai contoh, jika $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 1/x$, maka $f + g$ adalah fungsi yang memetakan x ke $x^2 + 1/x$, yakni

$$(f + g)(x) = x^2 + 1/x.$$

Daerah asal $f + g$ adalah irisan dari daerah asal f dan daerah asal g, yakni $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$.

Selain keempat operasi tadi, kita dapat pula mendefinisikan *pangkat* p dari fungsi f, yakni

$$f^{p}(x) = [f(x)]^{p},$$

asalkan bentuk di ruas kanan terdefinisi.

Diberikan dua fungsi f dan g, kita dapat pula melakukan operasi *komposisi*, yang dilambangkan dengan $g \circ f$. Di sini, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Untuk memahami fungsi komposisi $g \circ f$, bayangkan x pertama kali dipetakan ke f(x) oleh f, kemudian dipetakan lagi ke $g(f(x))$ oleh g.

$$x \quad \rightarrow \quad f(x) \quad \rightarrow \quad g(f(x))$$

Daerah asal $g \circ f$ adalah $\{ x \in D(f) \mid f(x) \in D(g) \}$, dengan $D(f)$ dan $D(g)$ menyatakan daerah asal f dan g berturut-turut.

Contoh 1. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2$. Maka $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$. Daerah asalnya sama dengan daerah asal f, yakni $[0,\infty)$.

Contoh 2. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = 1/x$. Maka $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x}$. Daerah asalnya adalah $\{ x \in D(f) \mid f(x) \neq 0 \} = (0,\infty)$.

Catatan. Operasi komposisi tidak bersifat *komutatif*, yakni, secara umum, $g \circ f \neq f \circ g$.

Latihan. Untuk kedua contoh di atas, tentukan $f \circ g$ (dengan cermat) dan simpulkan apakah $f \circ g = g \circ f$.

Catatan. Dua fungsi sama jika dan hanya jika kedua-nya mempunyai aturan atau rumus yang sama DAN daerah asalnya sama.

Beberapa Fungsi Khusus

Fungsi *konstan*: $f(x) = k$, k konstanta.

Fungsi *identitas*: $f(x) = x$.

Fungsi *linear*: $f(x) = ax + b$, a dan b konstanta.

Fungsi *kuadrat*: $f(x) = ax^2 + bx + c$, a,b,c konstan.

Fungsi *polinom*: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, dengan n bilangan bulat positif.

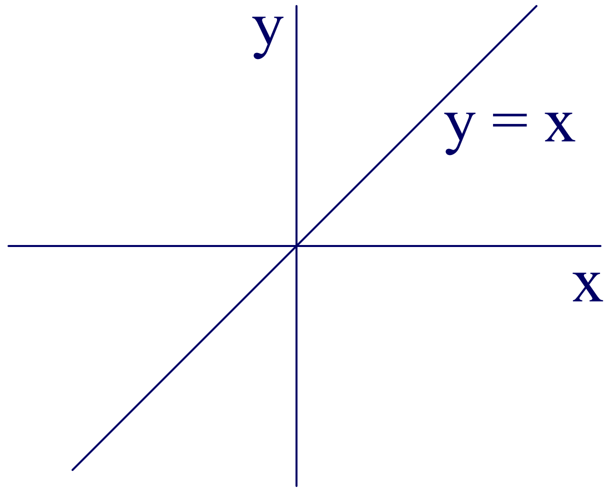
Fungsi *rasional*: $f(x) = p(x)/q(x)$, dengan p dan q fungsi polinom.

Fungsi *nilai mutlak* : $f(x) = |\,x\,|$.

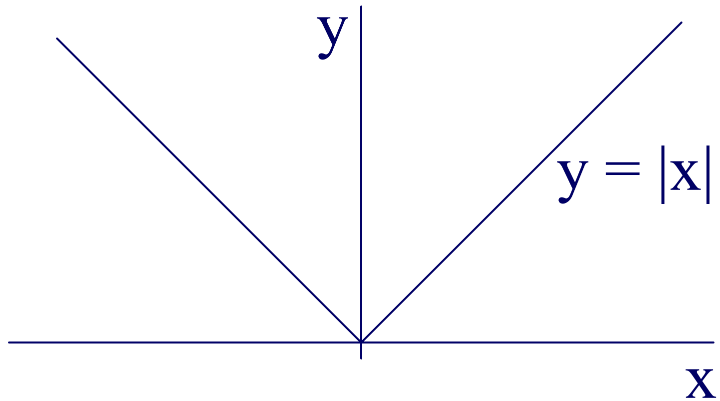
Fungsi *aljabar*, spt. : $f(x) = \sqrt{x}$.

$g(x) = x^{1/3} + 1$.

Grafik fungsi $f(x) = x$



Grafik fungsi $f(x) = |\, x \,|$



Selain fungsi-fungsi tadi, kita juga mempelajari *fungsi trigonometri*, yakni $f(x) =$

cos x, sin x, tan x, atau cot x.

Nilai cos x dan sin x sama dengan panjang alas dan tinggi segitiga siku-siku dengan panjang sisi miring 1 dan sudut antara alas dan sisi miringnya x (radian). Sementara itu,

$$\tan x = \sin x / \cos x,$$
$$\cot x = \cos x / \sin x.$$

Ingat kembali berbagai kesamaan trigonometri, seperti $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Limit

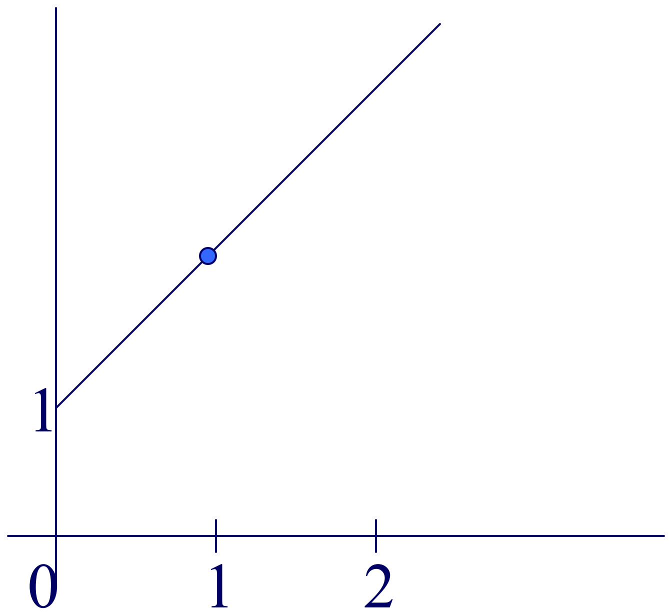
Fungsi $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ terdefinisi untuk x di *sekitar* 1 tetapi tidak di x = 1. Pertanyaannya sekarang adalah: berapa nilai $f(x)$ untuk x di sekitar 1?

Persisnya: jika x mendekati 1, maka $f(x)$ akan mendekati bilangan apa? (Catat di sini bahwa ungkapan x mendekati 1 tidak mengharuskan x = 1.)

Untuk menjawab pertanyaan di atas, perhatikan tabel nilai $f(x)$ pada halaman berikut. Tampak jelas bahwa $f(x)$ mendekati 2 ketika x mendekati 1.

Tabel nilai $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ untuk $x \approx 1$

x	f(x)
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001
↓	↓
1	?
↑	↑
0.9999	1.9999
0.999	1.999
0.99	1.99
0.9	1.9



Catat bahwa $f(x) = x + 1$ untuk $x \approx 1$. (Lambang $x \approx 1$ berarti x di sekitar 1.)

Tampak jelas bahwa $f(x)$ mendekati 2 ketika x mendekati 1. Dalam hal ini kita tuliskan

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

(baca: *limit* $f(x)$ *di* 1 sama dengan 2). Secara intuitif,

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

berarti:

Jika x mendekati c, maka $f(x)$ mendekati L.

Secara persis, lambang limit di atas berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < | x - c | < \delta$, maka $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Kalimat terakhir berarti bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sebarang dekat ke L asalkan x cukup dekat ke c.

Pada contoh di atas, diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang kita dapat memilih $\delta = \varepsilon$, sedemikian sehingga:

$$\text{jika } 0 < |x - 1| < \delta, \text{ maka } |f(x) - 2| =$$
$$|(x + 1) - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon.$$

Dengan perkataan lain, nilai $f(x)$ dapat dibuat berada dalam radius ε dari 2 asalkan $x \neq 1$ dan berada dalam radius δ dari 1. (Di sini, secara kebetulan saja, nilai δ yang memenuhi sifat di atas sama dengan ε.)

Untuk menguji pemahaman akan kalimat "untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < | x - c | < \delta$, maka $| f(x) - L | < \varepsilon$", periksalah BENAR atau SALAH pernyataan berikut:

1. Jika $0 < | x - 1 | < ½$, maka $| 2x - 2 | < 1$.
2. Jika $0 < | x - 1 | < ½$, maka $| 2x - 2 | < ½$.
3. Terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < | x - 1 | < \delta$, maka $| 2x - 2 | < ½$.
4. Terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < | x - 1 | < \delta$, maka $| 2x - 2 | < ¼$.
5. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian shg jika $0 < | x - 1 | < \delta$, maka $| 2x - 2 | < \varepsilon$.

Contoh 1. Tentukan limit $f(x) = 3x$ di 1 secara intuitif dan buktikan secara persis.

Jawab. Secara intuitif, jika x mendekati 1, maka $f(x)$ akan mendekati 3. Secara persis, diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, kita harus memilih suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < | x - 1 | < \delta$, maka $| f(x) - 3 | < \varepsilon$. Perhatikan bahwa jika $0 < | x - 1 | < \delta$, maka

$$| f(x) - 3 | = | 3x - 3 | = 3| x - 1| < 3\delta.$$

Jadi, kita dapat memilih $\delta = \varepsilon/3$, sehingga ketaksamaan terakhir menjadi $| f(x) - 3 | < \varepsilon$.

Latihan

1. Tentukan limit *f*(x) = 2x + 3 di 5 secara intuitif dan buktikan secara persis.
2. Tentukan limit *g*(x) = √x di 0 secara intuitif dan buktikan secara persis.
3. Tunjukkan secara persis bahwa $\lim_{x \to c} |x| = |c|$.

Limit Sepihak

Jika x mendekati c *dari kiri* mengakibatkan *f*(x) mendekati *L*, maka kita tuliskan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

(baca: *limit kiri f*(x) di c sama dengan *L*).

Secara persis, ini berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $c - \delta < x < c$, maka $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Catat bahwa "$c - \delta < x < c$" setara dengan "$0 < | x - c | < \delta$ DAN $x < c$".

Limit kanan $f(x)$ di c didefinisikan secara analog. Persisnya, kita tuliskan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $c < x < c + \delta$, maka $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Limit fungsi di suatu titik ada jika dan hanya jika limit kiri dan limit kanannya ada dan sama. Limit fungsi di titik tertentu tidak ada bila

(a) limit kiri dan limit kanan ada, tetapi berbeda, atau
(b) limit kiri atau limit kanan tidak ada.

Limit (kiri/kanan) $f(x)$ di c tidak ada mungkin karena $f(x)$ tak terbatas di sekitar c atau karena nilai $f(x)$ berosilasi di sekitar c. Sebagai contoh, limit $f(x) = 1/x$ di 0 tidak ada karena $f(x)$ tak terbatas di sekitar 0 (lihat grafiknya pd h. 16). Sementara itu, limit $g(x) = \sin 1/x$ di 0 tidak ada karena $g(x)$ berosilasi di sekitar 0.

Teorema Dasar Limit

(di sini lim berarti limit di c)

1. lim k = k.
2. lim x = c.
3. lim k.f(x) = k.lim f(x).
4. lim [f(x) + g(x)] = lim f(x) + lim g(x).
5. lim [f(x).g(x)] = lim f(x) + lim g(x).
6. lim [f(x)/g(x)] = lim f(x) / lim g(x), asalkan lim g(x) ≠ 0.
7. lim [f(x)]^n = [lim f(x)]^n, n ϵ N.
8. lim $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$, asalkan lim f(x) > 0 bila n genap.

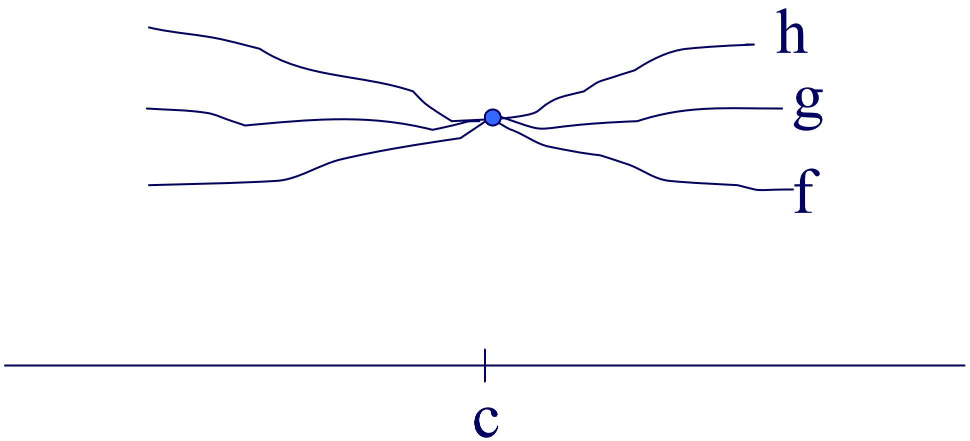
Contoh 2. Di c, lim x^2 = [lim x]^2 = c^2, berdasarkan Teorema Dasar Limit ke-5 atau ke-7. Juga, lim √x = √lim x = √c, berdasarkan Teorema Dasar Limit ke-8. Sekarang, lim (x^2 + √x) = c^2 + √c, berdasarkan hasil di atas dan Teorema Dasar Limit ke-4.

Contoh 3. Di c, lim (x + 1) = c + 1 dan lim (x^2 + 1) = c^2 + 1. Dengan Teorema Dasar Limit ke-6, kita peroleh lim (x+1)/(x^2+1) = (c+1)/(c^2+1).

<u>Latihan</u>. Dengan menggunakan Teorema Dasar Limit, tentukan (a) lim (px^2 + qx + r) dan (b) lim [1/(1+x^2)] di c.

Teorema Substitusi. Jika f fungsi polinom atau fungsi rasional, maka lim f(x) = f(c) asalkan f(c) terdefinisi.

Teorema Apit. Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk $x \approx c$ dan lim f(x) = lim h(x) = L, maka lim g(x) = L.



Contoh 4. Diketahui $1 - x^2/6 \leq (\sin x)/x \leq 1$ untuk $x \approx 0$. Di 0, lim $(1 - x^2/6\ ) = 1 =$ lim 1. Menurut Teorema Apit, kita peroleh lim $(\sin x)/x = 1$.

Latihan. Dengan menggunakan Teorema Apit, hitung lim $x.\sin(1/x)$ di 0.

Kekontinuan

Fungsi f dikatakan *kontinu* di c apabila limit $f(x)$ di c sama dengan nilai $f(c)$.

Contoh 5. Fungsi polinom kontinu di setiap $c \in \mathbf{R}$.

Demikian pula fungsi rasional kontinu di setiap titik dalam daerah asalnya.

Contoh 6. Fungsi nilai mutlak $f(x) = |\, x \,|$ kontinu di setiap $c \in \mathbf{R}$. Fungsi akar kuadrat $g(x) = \sqrt{x}$ kontinu di setiap $c \geq 0$.

Teorema. (a) Jika f dan g kontinu di c, maka $k.f$, $f + g$, $f - g$, $f.g$, f/g, f^{n}, dan $\sqrt{f}$ kontinu di c.
(b) Jika f kontinu di c dan g kontinu di $f(c)$, maka $g \circ f$ kontinu di c.
(c) Jika $\lim f(x) = L$ dan g kontinu di L, maka $\lim g \circ f(x) = g(L)$.

Contoh 7. Fungsi $h(x) = |x^2 + 1|$ kontinu di setiap $c \in \mathbf{R}$ karena $h = g \circ f$ dengan $f(x) = x^2 + 1$ kontinu dan $g(x) = |x|$ juga kontinu di setiap $c \in \mathbf{R}$.

Contoh 8. Diketahui $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, $x \neq 1$. Jika kita ingin memperluas f sedemikian sehingga f kontinu di 1, berapakah nilai yang harus kita definisikan di 1?

<u>Jawab</u>. Karena limit $f(x)$ di 1 sama dengan 2, maka kita harus mendefinisikan $f(1) = 2$ sehingga f kontinu di 1.

<u>Latihan</u>. Dapatkah $g(x) = 1/x$ diperluas sehingga g kontinu di 0?

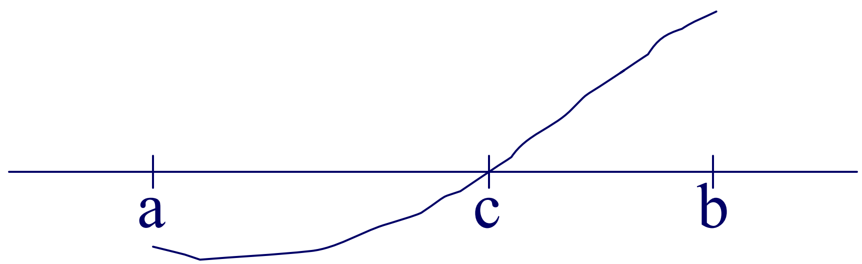
Teorema Nilai Antara

Fungsi *f* dikatakan kontinu pada selang [a,b] apabila *f* kontinu di setiap c ϵ (a,b), kontinu kanan di a [yakni, limit kanan *f* di a sama dengan f(a)], dan kontinu kiri di b [yakni, limit kiri *f* di b sama dengan *f*(b)].

Secara intuitif, grafik fungsi *f* tidak terputus pada [a,b] (dapat digambar tanpa pernah mengangkat ujung pena dari kertas).

Sebagai contoh, $f(x) = x^3 – x^2 + 1$ kontinu pada sebarang selang di **R**.

Teorema Nilai Antara. Jika f kontinu pada [a,b] dan f(a) dan f(b) berbeda tanda (yakni, yang satu positif dan yang lainnya negatif), maka terdapat c ϵ (a,b) sedemikian sehingga $f(c) = 0$.



Contoh 9. Fungsi $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada [-1,2], $f(-1) = -1$ dan $f(2) = 5$. Menurut Teorema Nilai Antara, terdapat c ϵ (-1,2) sedemikian sehingga $f(c) = c^3 - c^2 + 1 = 0$ [yakni, f mempunyai *akar* di (-1,2)].

SOAL-SOAL BAB II

2.1 no. 10, 18, 23, 31, 38.
2.2 no. 4, 5, 12, 13, 15, 32, 33.
2.3 no. 11, 35.
2.4 no. 1, 7, 29, 39.
2.5 no. 7, 14, 18, 21, 22, 23.
2.6 no. 3, 5, 15, 25, 38, 50.
2.7 no. 2, 11, 13, 17, 21, 33, 35, 39, 40, 43, 44.