BAB III. TURUNAN

- Kecepatan Sesaat dan Gradien Garis Singgung
- Turunan dan Hubungannya dengan Kekontinuan
- Aturan Dasar Turunan
- Notasi Leibniz dan Turunan Tingkat Tinggi
- Penurunan Implisit
- Laju yang Berkaitan
- Diferensial dan Aproksimasi

Kecepatan Sesaat dan Gradien Garis Singgung

Misalkan sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus menurut persamaan

$$x = x(t),$$

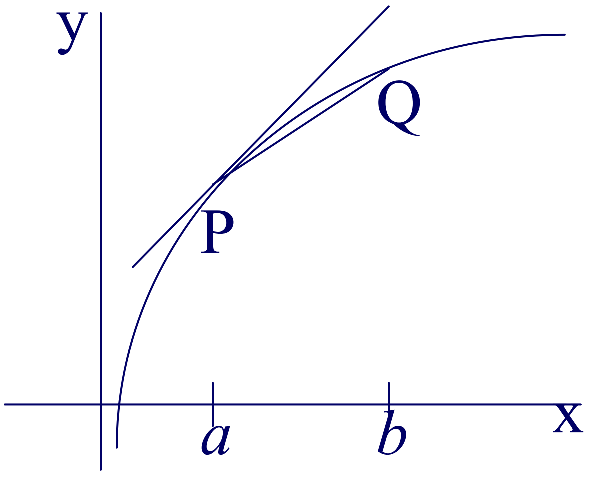
dengan x menyatakan posisi benda tersebut dan t menyatakan waktu. Kecepatan rata-ratanya dari t = *a* s/d t = *b* adalah

$$v[a,b] = [x(b) - x(a)]/(b - a).$$

Kecepatan sesaat pada t = *a* adalah

$$v(a) = \lim_{b \to a} \frac{x(b) - x(a)}{b - a}.$$

Sekarang misalkan kita mempunyai fungsi y = f(x) yang grafiknya cukup mulus, khususnya di sekitar x = a, sehingga mempunyai garis singgung di a (lihat gambar).



Gradien garis lurus yang melalui titik P(a,f(a)) dan Q(b,f(b)) adalah [f(b) – f(a)]/(b – a). Gradien garis singgung pada grafik y = f(x) di P(a,f(a)) adalah

$$m = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Di sini kita melihat bahwa kecepatan sesaat dan gradien garis singgung ternyata merupakan bentuk limit yang sama. Bentuk limit ini juga muncul dalam persoalan lainnya (lihat Soal 3.1 no. 19). Semua ini memotivasi kita untuk membahas bentuk limit ini secara khusus.

Turunan

Fungsi y = f(x) dikatakan mempunyai *turunan* di a jika

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ada. *Turunan f* di a didefinisikan sama dengan limit ini, dan dilambangkan dengan $f\,'(a)$. Dengan substitusi $b = a + \text{h}$, kita peroleh

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

Contoh 1. Misalkan $f(\text{x}) = \text{x}^2$ dan $a = 1$. Kita hitung

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2.$$

Jadi, f mempunyai turunan di 1 dan $f\,'(1) = 2$. Secara umum, dapat diperiksa bahwa f mempunyai turunan di a sebarang dan $f\,'(a) = 2a$.

Latihan

1. Tentukan turunan $f(x) = \sqrt{x}$ di $a > 0$ sebarang.
2. Tentukan turunan $f(x) = 1/x$ di $a \neq 0$ sebarang.
3. Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ tidak mempunyai turunan di 0.

Hubungan antara Turunan dan Kekontinuan

Jika f mempunyai turunan di a, maka f kontinu di a (lihat Purcell hal. 118). Namun sebaliknya tidak berlaku: kekontinuan di a tidak menjamin adanya turunan di a. Sebagai contoh, fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di 0 tetapi tidak mempunyai turunan di 0.

Aturan Dasar Turunan

1. Jika $f(x) = k$, maka $f'(x) = 0$.
2. Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$.
3. Aturan Pangkat: Jika $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}$), maka $f'(x) = n.x^{n-1}$.
4. Aturan Kelipatan Konstanta: $(kf)'(x) = k.f'(x)$.
5. Aturan Jumlah: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
6. Aturan Hasilkali: $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.
7. Aturan Hasilbagi:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$
8. Aturan Rantai: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$.

Untuk fungsi trigonometri, kita mempunyai:

9. Jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$.
10. Jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$.

Aturan 9 dan 10 dapat dibuktikan dengan menggunakan fakta bahwa

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{dan} \quad \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0$$

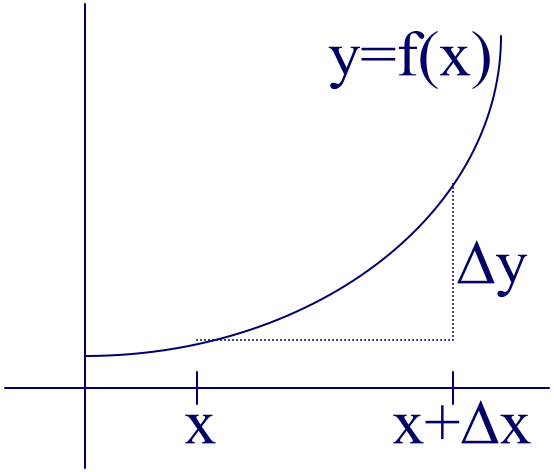
(lihat Purcell hal. 132-136). Dengan Aturan 9 dan 10, dan aturan-aturan sebelumnya, turunan fungsi trigonometri lainnya dapat ditentukan.

Latihan. Dengan menggunakan Aturan Dasar Turunan, tentukan turunan fungsi berikut:

1. $f(x) = x(x^2 + 1)$.
2. $g(x) = (5x - 4)/(3x^2 + 1)$.
3. $h(x) = (x^2 + 1)^{10}$.
4. $k(x) = \sin^2 t$.

Notasi Leibniz

Pada gambar di samping, tampak bahwa pertambahan sebesar Δx pada x menyebabkan pertambahan sebesar Δy pada y, dengan



$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Bagi kedua ruas dengan Δx, kita peroleh

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Jika $\Delta x \to 0$, maka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

G. Leibniz menggunakan lambang dy/dx untuk menyatakan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Jadi, jika $y = f(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Contoh 2. Jika y = x^3 + x, maka dy/dx = $3x^2$ + 1.

Dengan notasi Leibniz, Aturan Rantai berbunyi:
Jika y = *f*(u) dan u = *g*(x), maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} .$$

Contoh 3. Misalkan y = $(x^3 + x)^{10}$ = u^{10} dengan u = x^3 + x. Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 10u^9 .(3x^2 + 1) = 10(x^3 + x)^9 (3x^2 + 1).$$

<u>Latihan</u>. Diketahui y = $\sin^2(2x)$. Tentukan dy/dx.

Turunan Tingkat Tinggi

Diberikan sebuah fungsi f, kita turunkan f', yang juga merupakan fungsi. Dari f' dapat kita turunkan $f'' = (f')'$, yang disebut *turunan kedua* f, dan dari f'' kita dapat memperoleh *turunan ketiga* f, yakni $f''' = (f'')'$, dst.

Turunan ke-n dari $y = f(x)$ dilambangkan dengan $f^{(n)}$ atau d^ny/dx^n.

Contoh 4. Jika $y = \sin 2x$, maka $dy/dx = 2 \cos 2x$, $d^2y/dx^2 = -4 \sin 2x$, $d^3y/dx^3 = -8 \cos 2x$, dst.

<u>Latihan</u>. Tentukan rumus umum turunan ke-n dari $f(x) = 1/x$.

Bila turunan pertama mempunyai interpretasi fisis kecepatan sesaat, maka turunan kedua secara fisis dapat diinterpretasikan sebagai *percepatan* (sesaat) yang mengukur laju perubahan kecepatan terhadap waktu (lihat Purcell hal. 151-155).

Untuk memahami lebih jauh tentang interpretasi dari turunan, khususnya turunan pertama, kedua, dan ke-tiga, baca Purcell hal. 155 tentang model matematika dan kerjakan Soal 3.7 no. 39.

Penurunan Implisit

Misalkan kita mempunyai persamaan

$$7y^3 + y = x^3$$

dan ingin menentukan persamaan garis singgung pada grafik persamaan tersebut di (2,1). Masalahnya adalah bagaimana menghitung dy/dx, padahal kita tidak mempunyai rumus eksplisit untuk y dalam x.

Secara implisit, kita dapat menurunkan kedua ruas terhadap x dengan menggunakan Aturan Rantai (dengan mengingat bahwa y adalah fungsi dari x):

$$21y^2.dy/dx + dy/dx = 3x^2.$$

Dengan demikian kita peroleh

$$dy/dx = (3x^2)/(21y^2+1).$$

Di (2,1), kita hitung

$$dy/dx = 12/(21 + 1) = 6/11.$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$y – 1 = 6/11(x – 2)$$

atau

$$6x – 11y – 1 = 0.$$

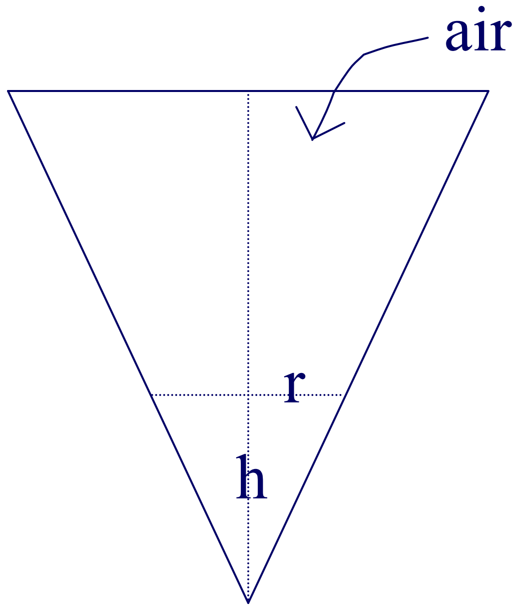
Dengan penurunan implisit, kita dapat membuktikan Aturan Pangkat berikut: Jika $y = x^r$ ($r \in \mathbf{Q}$), maka $dy/dx = r.x^{r-1}$ (lihat Purcell hal. 163-164).

Latihan. Diberikan persamaan $x^2 + y^3 = x + 1$, tentukan dy/dx dan d^2y/dx^2.

Laju yang Berkaitan

Jika x dan y merupakan dua peubah yang berkaitan dan masing-masing berubah terhadap waktu (t), maka dx/dt dan dy/dt merupakan laju yang berkaitan.

Contoh 5. Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju 8 dm^3/menit. Jika tinggi tangki tersebut adalah 24 dm dan jari-jari permukaan atasnya 12 dm, seberapa cepatkah permukaan air naik pada saat tingginya 4 dm?



Jawab: Misalkan V menyatakan volume, r jari-jari permukaan, dan h tinggi air. Maka

$$V = (\pi/3)r^2h.$$

Di sini $r = h/2$, sehingga

$$V = (\pi/12)h^3.$$

Turunkan kedua ruas terhadap t, kita peroleh

$$dV/dt = (\pi/4)h^2.dh/dt.$$

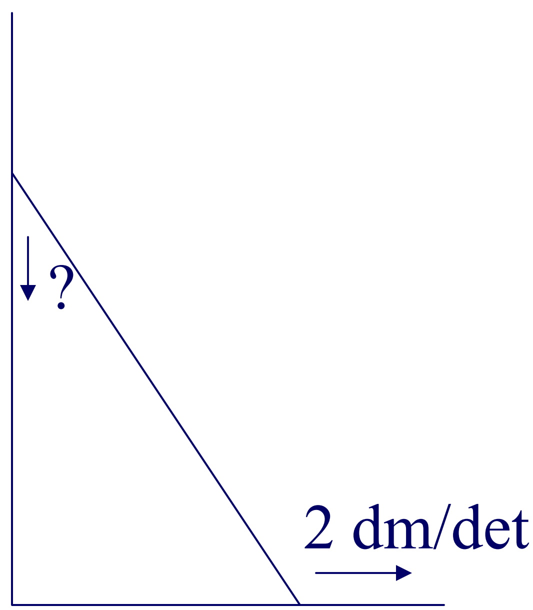
Diketahui $dV/dt = 8\ dm^3/\text{menit}$. Jadi, pada saat $h = 4$ dm, kita mempunyai

$$8 = 4\pi.dh/dt$$

sehingga

$$dh/dt = 2/\pi\ \text{dm/menit}.$$

Latihan. (Soal 3.9 no. 7)
Sebuah tangga yang panjangnya 20 dm bersandar di dinding. Jika ujung bawah tangga ditarik sepanjang lantai menjauhi dinding dengan laju 2 dm/detik, seberapa cepatkah ujung atas tangga bergeser menuruni dinding pada saat ujung bawah tangga berjarak 4 dm dari dinding?



Diferensial dan Aproksimasi

Misalkan $y = f(x)$ mempunyai turunan di x dan $dx = \Delta x$ menyatakan *diferensial* peubah bebas x. Maka, diferensial peubah tak bebas y didefinisikan sebagai

$$dy = f'(x)dx.$$

Di sini dy merupakan hampiran untuk Δy [ingat: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$], sehingga

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx,$$

asalkan $\Delta x \approx 0$.

Pada gambar di samping:

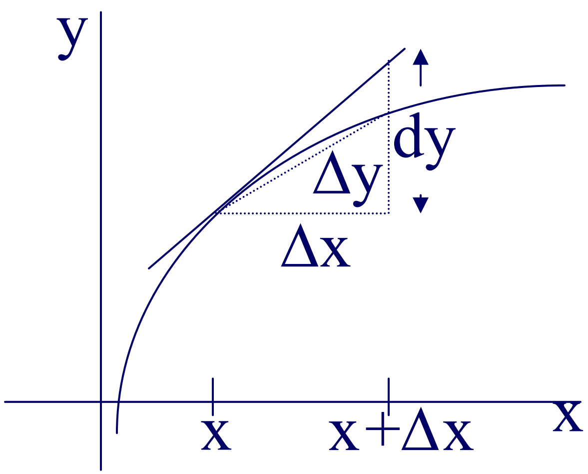
$dx = \Delta x$

$dy = f'(x)dx$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

dan

$dy \approx \Delta y$ bila $\Delta x \approx 0$.



Contoh 6. Misal kita ingin menghampiri nilai $\sqrt{4,1}$.
Tinjau $y = \sqrt{x}$. Maka

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + 1/(2\sqrt{x}).\Delta x.$$

Khususnya, untuk $x = 4$ dan $\Delta x = 0,1$:

$$\sqrt{4,1} \approx \sqrt{4} + 1/(2\sqrt{4}).(0,1) = 2 + 0,025 = 2,025.$$

SOAL-SOAL BAB III

3.1 no. 17, 19, 21, 22, 25.
3.2 no. 5, 13, 23, 27, 41, 43.
3.3 no. 5, 11, 21, 33, 37, 47, 49, 52, 55, 57, 59.
3.4 no. 14, 23, 30.
3.5 no. 1, 9, 11, 17, 48, 52.
3.6 no. 9, 11, 17, 31, 32, 36.
3.7 no.5, 6, 17, 20, 23, 39.
3.8 no. 5, 11, 13, 19, 33, 37.
3.9 no. 1, 3, 7, 8, 11, 17.
3.10 no. 9, 21, 25.

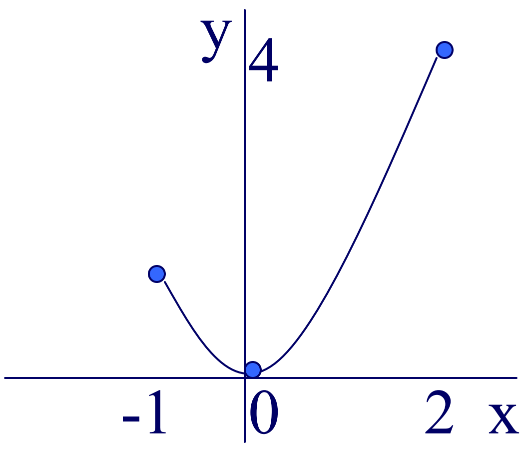
BAB IV. PENGGUNAAN TURUNAN

- Maksimum dan Minimum
- Kemonotonan dan Kecekungan
- Maksimum dan Minimum Lokal
- Masalah Maksimum dan Minimum
- Menggambar Grafik Fungsi
- Teorema Nila Rata-rata

Maksimum dan Minimum

Misalkan $f : D \rightarrow R$ dan $c \in D$. Nilai $f(c)$ disebut *nilai maksimum* apabila $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in D$. Nilai $f(c)$ disebut *nilai minimum* apabila $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in D$. Nilai maksimum atau minimum disebut *nilai ekstrim*.

Contoh 1. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [-1,2]$. Nilai maksimumnya adalah 4 [$= f(2)$], sedangkan nilai minimumnya adalah 0 [$= f(0)$]. Perhatikan grafiknya.



Teorema Eksistensi Nilai Ekstrim. Jika f kontinu pada [a,b], maka f akan mencapai nilai maksimum dan minimum pada [a,b].

Teorema ini mengatakan bahwa kekontinuan merupakan syarat cukup bagi eksistensi nilai ekstrim. Fungsi pada Contoh 1, misalnya, merupakan fungsi yang kontinu pada [-1,2] dan fungsi ini mempunyai nilai maksimum dan minimum pada [-1,2].

Fungsi yang tidak kontinu mungkin saja mempunyai nilai ekstrim. Sebagai contoh, fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -1, && \text{jika } x = 0,\\
&= x, && \text{jika } 0 < x < 1,\\
&= 2, && \text{jika } x = 1,
\end{aligned}
$$

mempunyai nilai maksimum 2 [= $f(1)$] dan nilai minimum -1 [= $f(0)$].

Namun demikian, ketakkontinuan tidak menjamin eksistensi nilai ekstrim. Sebagai contoh, fungsi

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \tfrac{1}{2}, && \text{jika } x = 0 \text{ atau } 1,\\
&= x, && \text{jika } 0 < x < 1,
\end{aligned}
$$

tidak mempunyai nilai ekstrim, baik maksimum maupun minimum.

Teorema Lokasi Titik Ekstrim. Misalkan daerah asal f adalah selang I yang memuat titik c. Jika f(c) adalah nilai ekstrim, maka c haruslah merupakan *titik kritis*, yakni c merupakan

(i) titik ujung selang I,

atau (ii) titik *stasioner* f, yakni f'(c) = 0,

atau (iii) titik *singular* f, yakni f'(c) tidak ada.

Teorema ini mengatakan bahwa nilai ekstrim hanya mungkin tercapai di titik kritis, karena itu teorema ini dikenal pula sebagai *Teorema Titik Kritis*. Untuk menentukan nilai ekstrim suatu fungsi, teorema ini menganjurkan kita mencari titik-titik kritisnya dulu.

Contoh 2. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$ pada $[-1,2]$.

Jawab: Turunan f adalah $f'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(1 - x)$. Jadi titik stasionernya adalah 0 dan 1, sedangkan titik singularnya tidak ada. Dengan demikian terdapat 4 titik kritis, yakni -1, 0, 1, dan 2 (dua titik ujung selang dan dua titik stasioner).

Sekarang bandingkan nilai f di titik-titik kritis tersebut:

$$f(-1) = 6, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = -3.$$

Menurut Teorema Lokasi Titik Ekstrim, f mesti mencapai nilai maksimum 6 (di -1) dan minimum -3 (di 2).

Latihan. Tentukan titik-titik kritis fungsi

$$f(x) = 50x - x^2/2, \quad \text{jika } 0 \le x \le 20,$$
$$= 60x - x^2, \quad \text{jika } 20 < x \le 60.$$

Tentukan nilai maksimum dan minimumnya.

Kemonotonan dan Kecekungan

Fungsi f dikatakan *naik* pada I apabila untuk setiap x, y ϵ I dengan $x < y$ berlaku $f(x) < f(y)$. Fungsi f dikatakan *turun* pada I apabila untuk setiap x, y ϵ I dengan $x < y$ berlaku $f(x) > f(y)$.

Fungsi f dikatakan *monoton* pada I apabila f naik atau turun pada I.

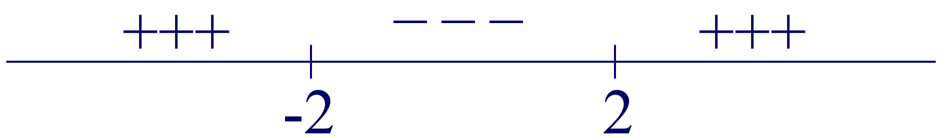
Catatan. I dapat berupa selang buka atau tutup.

Teorema 3. Misalkan f kontinu dan mempunyai turunan pada I. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f naik pada I. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f turun pada I.

Contoh 3. Diketahui $f(x) = x^3 - 12x$. Kita hitung turunannya:

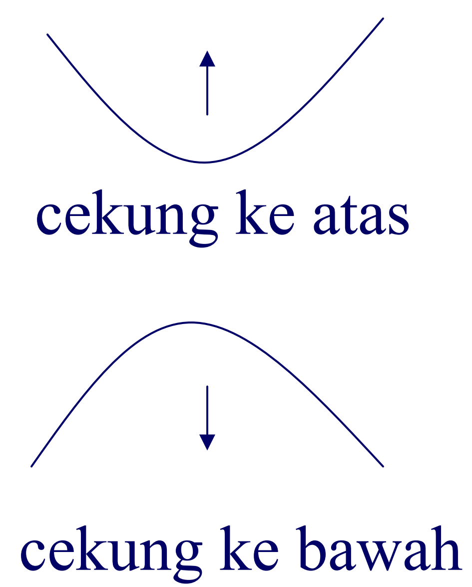
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2).$$

Periksa tanda $f\,'(x)$ pada garis bilangan real:



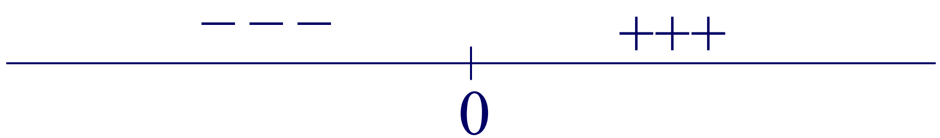
Menurut teorema di atas, f naik pada $(-\infty,-2)$ dan juga pada $(2,\infty)$; dan turun pada $(-2,2)$.

Misalkan f mempunyai turunan pada $I = (a,b)$. Jika $f\,'$ naik pada I, maka grafik fungsi f *cekung ke atas* pada I; jika $f\,'$ turun pada I, maka grafik fungsi f *cekung ke bawah* pada I.



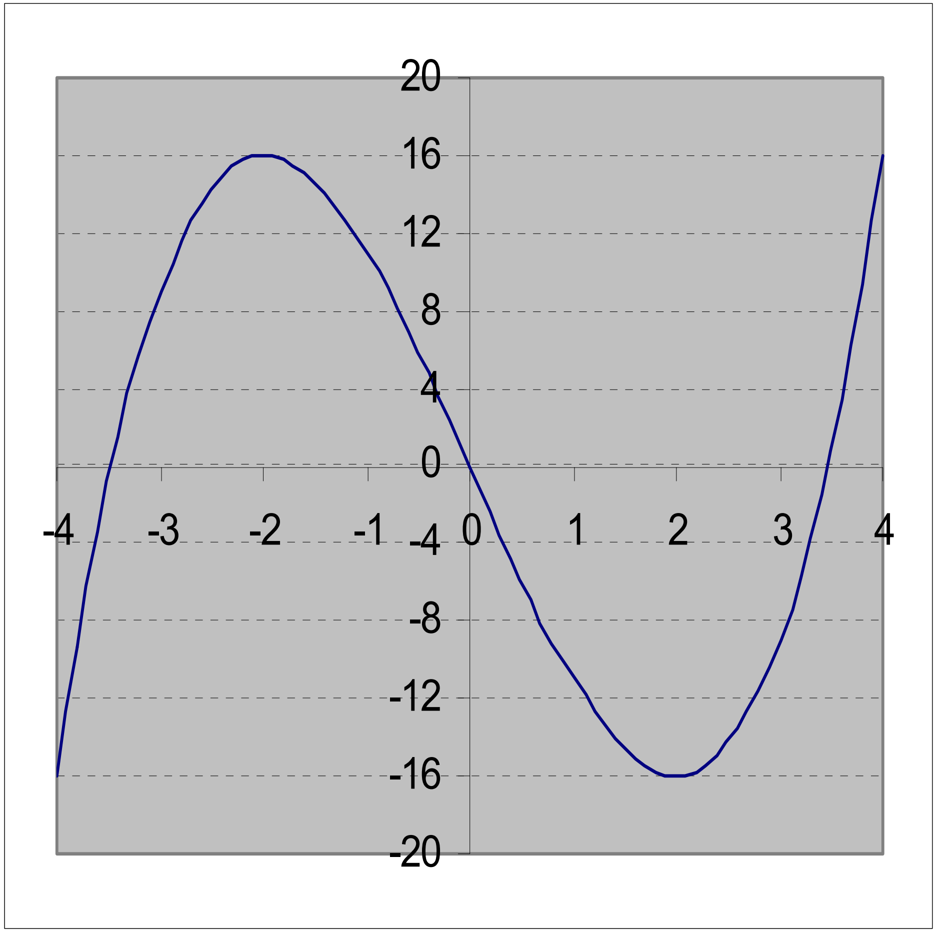
Teorema 4. Misalkan f mempunyai turunan kedua pada I. Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap x ϵ I, maka grafik fungsi f cekung ke atas pada I. Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap x ϵ I, maka grafik fungsi f cekung ke bawah pada I.

Contoh 4. Diketahui $f(x) = x^3 – 12x$. Maka, $f'(x) = 3x^2 – 12$ dan $f''(x) = 6x$. Periksa tanda $f''(x)$:

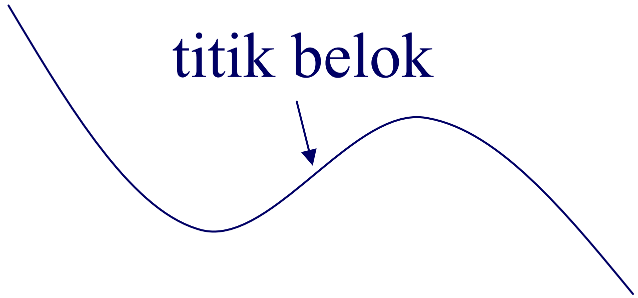


Menurut Teorema di atas, grafik fungsi f cekung ke atas pada $(0,\infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty,0)$.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Titik (c,f(c)) disebut *titik belok* (di buku: *titik balik*) f apabila f cekung ke atas di kiri c dan cekung ke bawah di kanan c, atau sebaliknya.



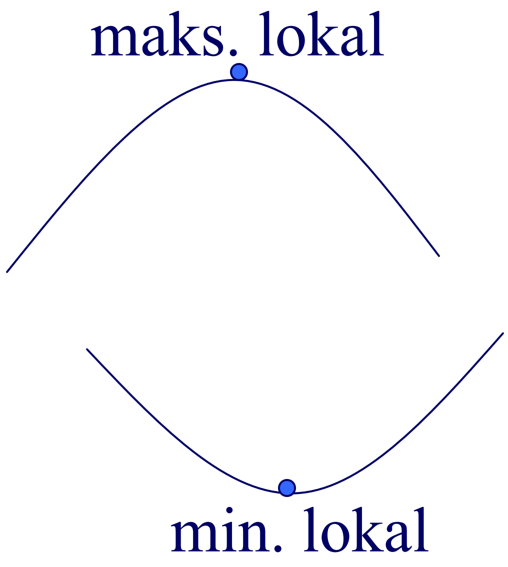
Pada contoh sebelumnya, (0,0) merupakan satu-satunya titik belok $f(x) = x^3 - 12x$.

Latihan. Tentukan titik belok $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, bila ada.

Maksimum dan Minimum Lokal

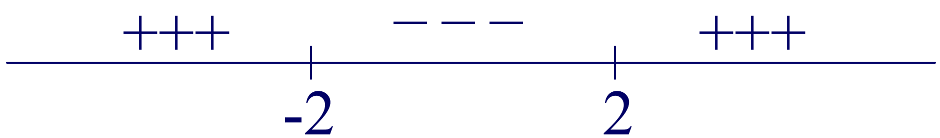
Nilai f(c) disebut *nilai maksimum* [*minimum*] *lokal f* apabila $f(c) \geq f(x)$ [$f(c) \leq f(x)$] di sekitar c. Nilai maksimum/minimum lokal disebut *nilai ekstrim lokal*.

Uji Turunan Pertama. Jika $f'(x) > 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) < 0$ di sekitar kanan c, maka f(c) merupakan nilai maksimum lokal. Jika $f'(x) < 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) > 0$ di sekitar kanan c, maka f(c) merupakan nilai minimum lokal.



Contoh 5. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$ mempunyai tanda:



Menurut Uji Turunan Pertama, $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal, sesuai dengan yang kita lihat pada grafiknya.

Latihan. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $g(x) = x/2 - \sin x$, $0 < x < 2\pi$, bila ada.

Uji Turunan Kedua. Misalkan $f'(c) = 0$ dan f mempunyai turunan kedua pada suatu selang yang memuat c. Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal. Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

Contoh 6. Untuk $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ di $x = -2$ dan di $x = 2$. Dengan Uji Turuan Kedua, kita hitung $f''(x) = 6x < 0$ di $x = -2$; jadi $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal. Sementara itu $f''(x) > 0$ di $x = 2$, dan karenanya $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal.

<u>Catatan</u>. Hasil di atas sesuai dengan hasil sebelumnya.

Latihan. Tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.
2. $g(x) = x + 1/x, \ x \neq 0$.
3. $h(x) = 64/(\sin x) + 27/(\cos x), \ 0 < x < \pi/2$.

Masalah Maksimum dan Minimum

Contoh 7. Tentukan titik pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang terdekat ke titik P(1,2).

Jawab: Misalkan s menyatakan jarak titik (x,y) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ ke titik P(1,2), yakni

$$s = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}.$$

Karena meminimumkan s sama dengan meminimumkan s^2, kita tinjau $D = s^2$,

$$\begin{aligned} D &= (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &= 6 - 2x - 4\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Turunkan terhadap x, kita peroleh

$$dD/dx = -2 + 4x/\sqrt{1-x^2}.$$

Perhatikan bahwa $dD/dx = 0$ apabila $4x = 2\sqrt{1-x^2}$, yaitu apabila $x = 1/\sqrt{5}$.

Dengan memeriksa tanda dD/dx di sekitar $1/\sqrt{5}$, kita simpulkan bahwa D mencapai minimum di $x = 1/\sqrt{5}$. Jadi titik terdekat ke $P(1,2)$ adalah $(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$.

Latihan

1. Tentukan titik pada hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ yang terdekat ke titik $Q(5,0)$.
2. Sebuah pulau kecil berjarak 2 km dari titik terdekat P pada garis pantai. Jika seseorang di pulau tersebut dapat mendayung perahunya dengan laju 3 km/jam dan berjalan kaki di pantai 4 km/jam, di mana ia harus berlabuh agar sampai di Q yang berjarak 5 km dari P dalam waktu yang paling singkat?

Menggambar Grafik Fungsi

Kita telah melihat bagaimana informasi tentang kemonotonan dan kecekungan dapat dipakai untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$. Berikut adalah sebuah contoh lainnya.

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$, dengan memperhatikan:

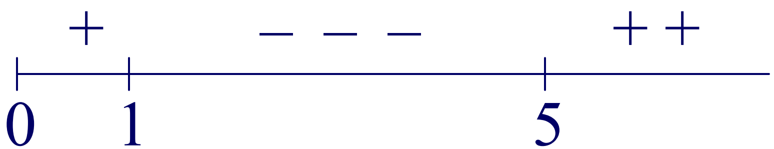
* daerah asal dan daerah hasilnya,
* titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
* kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
* kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada).

Daerah asal *f* adalah $[0,\infty)$ dan daerah hasilnya juga $[0,\infty)$, sehingga grafiknya akan terletak di kuadran pertama. Titik potong dengan sumbu x adalah 0 dan 5, sedangkan titik potong dengan sumbu y adalah 0.

Untuk x > 0, turunan pertama *f* adalah

$$f'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{2\sqrt{x}}.$$

Jadi, titik-titik stasionernya adalah 1 dan 5, dan tanda *f* ’(x) adalah



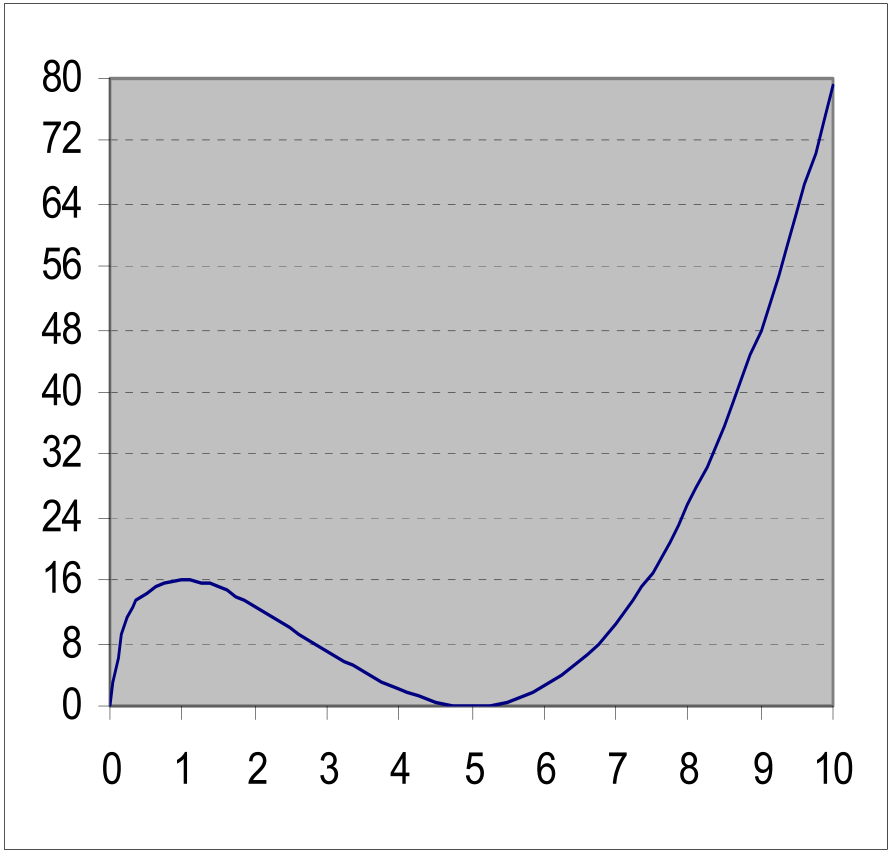
Jadi f naik pada [0,1), turun pada [1,5], dan naik pada (5,∞). Menurut Uji Turunan Pertama, $f(1) = 16$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(5) = 0$ merupakan nilai minimum lokal (sekaligus *global*).

Sekarang kita hitung turunan keduanya:

$$f''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{4x^{3/2}}.$$

Menggunakan rumus akar persamaan kuadrat, kita dapatkan $f''(x) = 0$ ketika $x = 1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2,6$. Di kiri 2,6, $f''(x) < 0$, shg grafiknya cekung ke bawah; sedangkan di kanan 2,6, $f''(x) > 0$, shg grafiknya cekung ke atas. (2,6;f(2,6)) merupakan titik belok.

Dengan semua informasi ini, kita dapat menggambar grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$ sebagai berikut:



Teorema Nilai Rata-rata

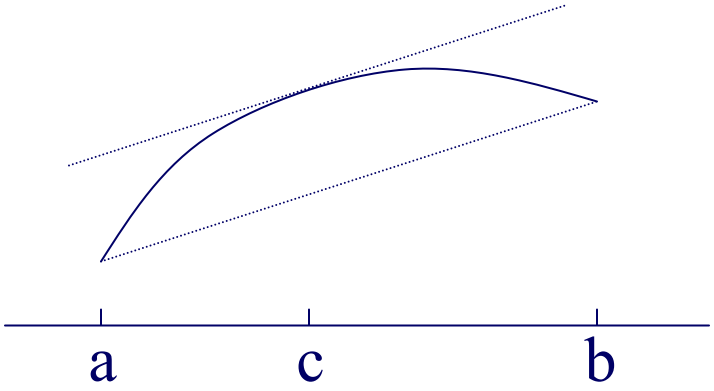
Pak Dono mengatakan bahwa ia telah menempuh 112 km dalam 2 jam tanpa pernah melampaui 55 km/jam. Tentu saja ia berbohong. Tetapi bagaimana kita dapat membuktikannya?

Teorema Nilai Rata-rata. Jika f kontinu pada [a,b] dan mempunyai turunan pada (a,b), maka terdapat suatu c ϵ (a,b) sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Catatan. [f(b) – f(a)]/(b – a) adalah *nilai rata-rata f*.

Ilustrasi:



Kembali ke cerita Pak Dono tadi, misalkan $f(t)$ menyatakan jarak yang ditempuh dalam t jam. Maka f kontinu dan turunannya, $f'(t)$, menyatakan kecepatan pada saat t. Menurut Teorema Nilai Rata-rata, mestilah terdapat $t_1 \in (0,2)$ sedemikian sehingga

$$f'(t_1) = [f(2) - f(0)]/(2 - 0) = 56.$$

Ini berarti bahwa Pak Dono pernah melampaui 56 km/jam.

Contoh 8. Diketahui $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Hitung nilai rata-rata f dan tentukan $c \in (0,1)$ sedemikian sehingga $f'(c)$ sama dengan nilai rata-rata f.

Jawab: Nilai rata-rata f pada $[0,1]$ adalah

$$[f(1) - f(0)]/(1 - 0) = 1.$$

Sementara itu $f'(x) = 2x = 1$ jika dan hanya jika $x = ½$. Jadi $c = ½$ adalah bilangan yang kita cari.

Latihan. Diketahui $g(x) = x^3/3$, $x \in [-2,2]$. Hitung nilai rata-rata g dan tentukan $c \in (-2,2)$ sedemikian sehingga $g'(c)$ sama dengan nilai rata-rata g.

SOAL-SOAL BAB IV

4.1 no. 1, 2, 7, 8, 11, 19, 21, 22, 23, 33, 34.
4.2 no. 4, 5, 15, 19, 24.
4.3 no. 2, 6, 8, 12, 13, 14, 19.
4.4 no. 4, 5, 9, 12, 23, 29.
4.5 no. 9, 12.
4.7 no. 1, 2, 4, 11.
4.8 no. 4, 7, 14, 32.

Catatan. Bagian 4.5 dipelajari sendiri.
Bagian 4.6 tidak dibahas.