BAB V. INTEGRAL

- Anti-turunan dan Integral Tak Tentu
- Persamaan Diferensial Sederhana
- Notasi Sigma dan Luas Daerah di Bawah Kurva
- Integral Tentu
- Teorema Dasar Kalkulus
- Sifat-sifat Integral Tentu Lebih Lanjut
- Substitusi dalam Penghitungan Integral Tentu

Anti-turunan dan Integral Tak Tentu

Fungsi F disebut *anti-turunan f* pada I apabila

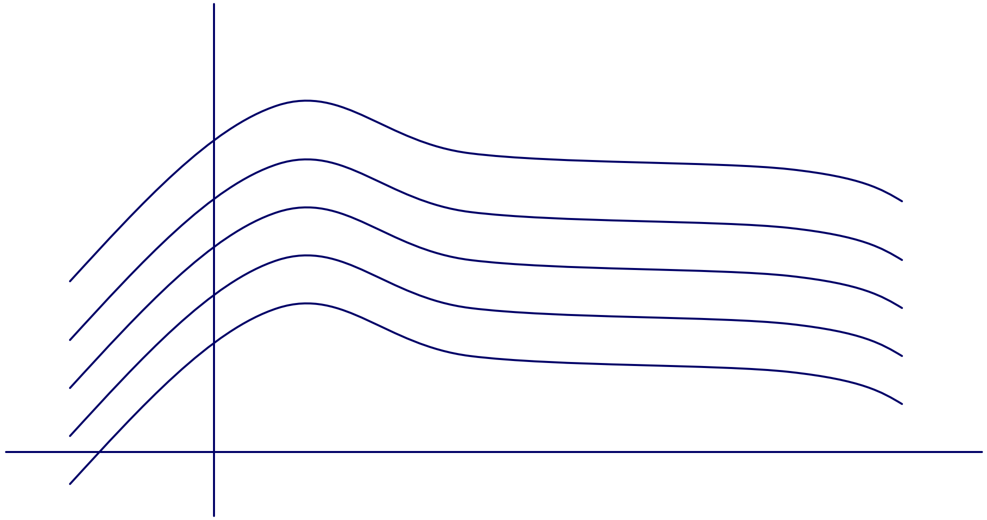
$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap $x \in I$. Sebagai contoh, $F(x) = x^4 + 1$ adalah anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada **R**. Secara umum, keluarga fungsi $F(x) = x^4 + C$ merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada **R**, karena $F'(x) = 4x^3 = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Keluarga fungsi anti-turunan $f(x)$ disebut *integral tak tentu* dari $f(x)$, dan dilambangkan dengan $\int f(x)\,dx$. Jadi, sebagai contoh,

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + C.$$

Secara grafik, keluarga fungsi anti-turunan $f(x)$ adalah keluarga fungsi yang anggotanya merupakan pergeseran ke atas atau ke bawah dari anggota lainnya. Semua anggota keluarga fungsi tersebut mempunyai turunan yang sama, yaitu $f(x)$.



Keluarga fungsi yang turunannya sama

Terkait dengan perbendaharaan turunan yang telah kita pelajari sebelumnya, kita mempunyai beberapa teorema berikut tentang integral tak tentu.

Teorema 1 (Aturan Pangkat). Jika $r \in Q$ dan $r \neq -1$, maka $\int x^r\, dx = x^{r+1}/(r+1) + C$.

Contoh 1

(a) $\int x^2\, dx = x^3/3 + C$. (b) $\int x^{-2}\, dx = -\, x^{-1} + C$.

Teorema 2 (Integral Tak Tentu sin x dan cos x)

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

Teorema 3 (Kelinearan Integral Tak Tentu)
Jika f dan g fungsi dan k adalah konstanta, maka

$$\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx$$

dan

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Contoh 3. $\int (6x^2 + 1)\,dx = 2\int 3x^2\,dx + \int 1\,dx = 2.x^3 + x + C.$

Teorema 4 (Aturan Pangkat yang Diperumum)
Jika r є **Q** dan r ≠ -1 dan g adalah fungsi yang mem-punyai turunan, maka

$$\int [g(x)]^r.g'(x)\,dx = [g(x)]^{r+1}/(r+1) + C.$$

Contoh 4. $\int (x^2 + 1)^5.2x\, dx = (x^2 + 1)^6/6 + C$.
(Di sini kita menerapkan Aturan Pangkat yang Diperumum dengan $g(x) = x^2 + 1$, $g'(x) = 2x$.)

Contoh 5. Jika $g(x) = \sin x$, maka $g'(x) = \cos x$. Jadi, menurut Aturan Pangkat yang Diperumum, kita peroleh

$$\int \sin x.\cos x\, dx = (\sin x)^2/2 + C.$$

Latihan. Tentukan integral tak tentu di bawah ini.

1. $\int (x^2 + x^{-2})\, dx$.
2. $\int (x^3 + 1).x^2\, dx$.
3. $\int \sin^2 x.\sin 2x\, dx$.

Persamaan Diferensial Sederhana

Jika $F'(x) = f(x)$, maka $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Dalam bahasa diferensial: jika $F'(x) = f(x)$, maka

(*) $$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

sehingga

$$\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Persamaan (*) merupakan contoh persamaan diferensial yang (paling) sederhana.

Persamaan diferensial banyak dijumpai dalam matematika, fisika, maupun bidang ilmu lainnya.

Contoh 6. Tentukan persamaan kurva yang melalui titik (1,2) dan mempunyai turunan 2x di setiap titik (x,y) yang dilaluinya.

Jawab. Misalkan persamaan kurva tersebut adalah y = *f*(x). Maka, dalam bahasa diferensial, informasi di atas mengatakan bahwa

$$dy = 2x\, dx.$$

Integralkan kedua ruas,

$$\int dy = \int 2x\, dx.$$

sehingga kita peroleh

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

atau $$y = x^2 + C, \qquad C = C_2 - C_1.$$

Persamaan $y = x^2 + C$ merepresentasikan keluarga kurva yang mempunyai turunan 2x di titik (x,y).

Sekarang kita akan mencari anggota keluarga kurva tersebut yang melalui titik (1,2). Dalam hal ini kita mempunyai persamaan

$$2 = 1^2 + C,$$

sehingga mestilah $C = 1$. Jadi persamaan kurva yang kita cari adalah

$$y = x^2 + 1.$$

Latihan. Tentukan fungsi $y = f(x)$ sedemikian sehingga $f'(x) = 3x^2 + 1$ dan $f(1) = 4$.

Notasi Sigma

Penjumlahan deret n bilangan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dilambangkan dengan notasi sigma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Sebagai contoh,

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Teorema 5 (Kelinearan Sigma)

$$\sum_{i=1}^{n} k.a_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i; \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Beberapa deret khusus (dengan indeks *i* berjalan dari 1 sampai dengan *n*), di antaranya:

$$\sum i = 1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2.$$

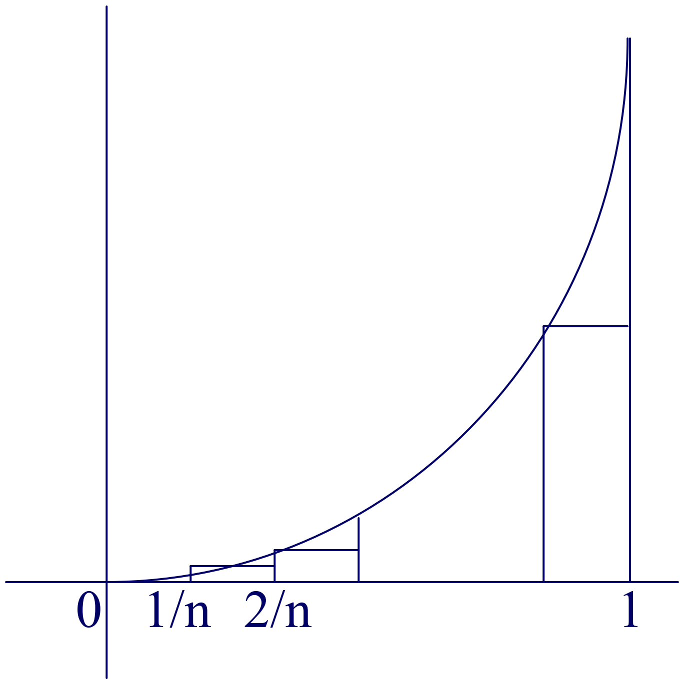
$$\sum i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

$$\sum i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n + 1)^2/4.$$

Deret pertama merupakan deret aritmetika n bilangan dengan suku pertama 1 dan beda 1.
Untuk pembuktian rumus deret kedua dan ketiga, lihat Purcell hal. 262-264.

Luas Daerah di Bawah Kurva

Misalkan kita ingin menghitung luas daerah di bawah kurva y = $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$. Pertama, bagi selang [0,1] atas n selang bagian yang sama panjangnya. Lalu, luas daerah tersebut (L) kita hampiri dengan jumlah luas persegipanjang di bawah kurva, yakni



$$L \approx \frac{1}{n}\left[0^2 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right].$$

Perhatikan bahwa deret di ruas kanan dapat kita tulis-ulang sebagai

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

yang jumlahnya

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

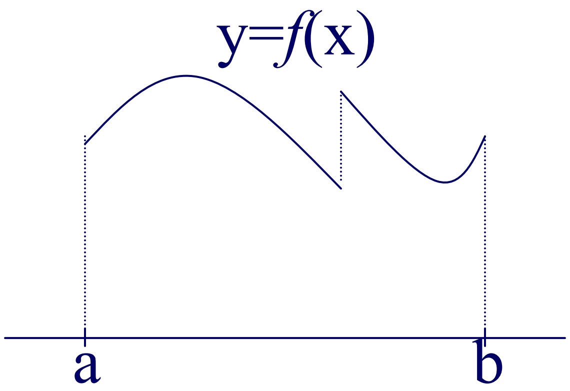
Jadi, kita kita peroleh hampiran

$$L \approx \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} := L_n.$$

Dari sini kita amati bahwa $L_n \to 1/3$ bila n $\to \infty$. Jadi, luas daerah yang sedang kita cari adalah 1/3.

Integral Tentu

Misalkan $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik. Bagi selang [a,b] atas n selang bagian (tak perlu sama panjang), sebutlah titik-titik pembaginya $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Himpunan titik-titik ini disebut sebagai *partisi* dari [a,b]. Untuk tiap $i = 1, \ldots, n$, tulis $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (= lebar selang bagian ke-i).



Dari tiap selang bagian, pilih sebarang titik $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Lalu bentuk penjumlahan berikut

$$R_P = \sum f(t_i).\Delta x_i$$

dengan indeks *i* berjalan dari 1 hingga n. Bentuk ini dikenal sebagai *jumlah Riemann* untuk *f* terhadap partisi $P = \{a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b\}$ dan titik-titik t_i.

Contoh 7. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, $P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{7}{8}$. Maka jumlah Riemann untuk *f* terhadap partisi P dan titik-titik t_i adalah $R_P = f(\frac{1}{3}).\frac{1}{3} + f(\frac{1}{2}).(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}) + f(\frac{7}{8})(1 - \frac{3}{4}) = 1/27 + 5/48 + 49/256$.

Jumlah Riemann untuk *f* merupakan hampiran untuk luas daerah di bawah kurva y = *f*(x), x є [a,b]. Semakin 'halus' partisinya, semakin baik hampiran tersebut. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

ada, maka *f* dikatakan *terintegralkan* pada [a,b] dan *integral tentu f* dari a ke b didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

<u>Catatan</u>. |P| = maks $\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$.

Dalam notasi $\int_a^b f(x)dx$, kita mengasumsikan bahwa

a < b. Jika a > b, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Jika a = b, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Catat pula bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Teorema 6. Jika f terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik pada [a,b], maka fungsi f terintegralkan pada [a,b].

Akibat 7. Fungsi polinom, fungsi rasional, $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x}$, $s(x) = \sin x$, dan $c(x) = \cos x$ merupakan fungsi yang terintegralkan pada sebarang selang terbatas yang termuat dalam daerah asalnya.

Sampai di sini kita hanya dapat mengatakan apakah sebuah fungsi terintegralkan pada suatu selang, dengan melihat apakah fungsi tersebut terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik.

Namun, untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut, selain dengan menggunakan definisinya, memerlukan 'alat bantu' yang lebih ampuh.

Teorema Dasar Kalkulus

Salah satu alat bantu untuk menghitung integral tentu adalah Teorema Dasar Kalkulus, yang berbunyi:

Jika f kontinu dan mempunyai anti-turunan F pada [a,b], maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Catatan. Dalam penghitungan integral tentu, notasi $F(x)\Big]_a^b$ berarti F(b) – F(a).

Contoh 8

(a) $$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

(b) $$\int_0^{\pi/2} (\cos x) dx = \sin x\Big]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Teorema 9 (Kelinearan Integral tentu)

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Contoh 9. Dengan menggunakan kelinearan integral tentu, kita dapat menghitung

$$\int_0^2 (x^2 + \sqrt{x})dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 \sqrt{x} dx = \tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Sifat-sifat Lanjut Integral Tentu

Selain kelinearan, integral tentu juga memenuhi:

Sifat penjumlahan selang:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Sifat pembandingan: Jika $f(x) < g(x)$ pada [a,b], maka

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx.$$

Sifat keterbatasan: Jika $m \le f(x) \le M$ pada [a,b], maka

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

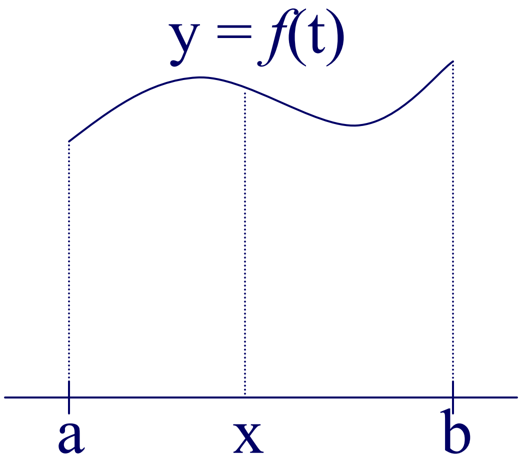
Contoh 10. Pada [0,1] berlaku $1 \le \sqrt{1 + x^4} \le \sqrt{2}$; karena itu menurut sifat keterbatasan

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{2}.$$

Misalkan *f* terintegralkan pada [a,b]. Definisikan

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Di sini, G(x) menyatakan luas daerah di bawah kurva y = *f*(t), a ≤ t ≤ x (lihat gambar).



Teorema Dasar Kalkulus II. G'(x) = *f*(x) pada [a,b]; yakni,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \forall x \in [a,b].$$

Contoh 11

(a) $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t^3\,dt\right) = x^3.$$

(b) $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 t^3\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x t^3\,dt\right) = -x^3.$$

(c) $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3\,dt\right) \overset{u=2x}{=} \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} t^3\,dt\right)\frac{du}{dx} = u^3.2 = 16x^3.$$

(d) $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} t^3\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_x^{1} t^3\,dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3\,dt\right)$$

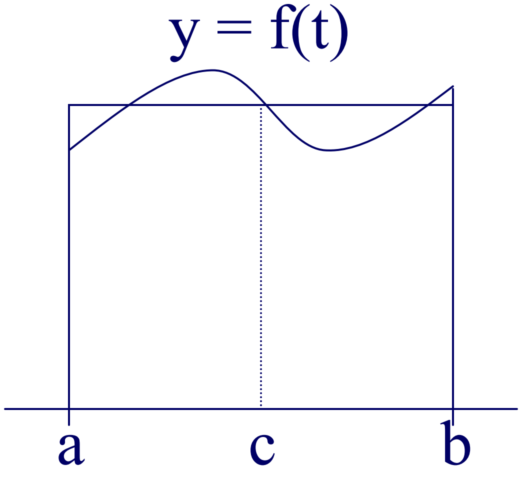
$$= -x^3 + 16x^3 = 15x^3.$$

Teorema Nilai Rata-rata Integral

Jika f kontinu pada [a,b], maka terdapat c ϵ [a,b] sedemikian sehingga

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

<u>Catatan</u>. Nilai f(c) dalam teorema ini disebut *nilai rata-rata integral* f pada [a,b] (lihat gambar). Perhatikan bahwa luas daerah di bawah kurva y = f(t), t ϵ [a,b], sama dengan f(c)(b – a).



Contoh 12. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Maka

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Jadi nilai rata-rata integral f pada [0,1] adalah ⅓.

<u>Latihan</u>. Tentukan nilai rata-rata integral $f(x) = 4x^3$ pada [1,3].

Substitusi dalam Penghitungan Integral Tentu

Misalkan kita ingin menghitung integral berikut

$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + x}.(2x+1)dx.$$

Dengan menggunakan Aturan Pangkat yang Diperumum, kita dapat menghitung integral tak tentunya:

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C.$$

Dengan demikian, integral tentu tadi dapat dihitung:

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)dx = \frac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{2}{3}(20)^{3/2}.$$

Integral semacam ini, baik integral tentu maupun integral tak tentu, dapat pula dihitung dengan teknik *substitusi*, yang akan kita bahas selanjutnya.

Sebagai contoh, untuk menghitung integral tak tentu $\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx$, kita gunakan substitusi peubah $u = x^2 + x$, sehingga $du = (2x + 1)dx$ dan integral di atas menjadi $\int u^{1/2}\, du$. Dengan Aturan Pangkat, kita peroleh

$$\int u^{1/2}\, du = \tfrac{2}{3}\, u^{3/2} + C.$$

Substitusikan kembali $u = x^2 + x$, kita dapatkan

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C,$$

sebagaimana yang kita peroleh sebelumnya dengan Aturan Pangkat yang Diperumum.

Sekarang, untuk menghitung integral tentu

$$\int_0^4 (x^2+x)^{1/2}(2x+1)\,dx,$$

kita lakukan substitusi seperti tadi: $u = x^2 + x$, $du = (2x + 1)dx$. Selanjutnya kita perhatikan efek substitusi ini terhadap kedua batas integral. Pada saat $x = 0$, kita peroleh $u = 0$; sementara pada saat $x = 4$, kita dapatkan $u = 20$. Dengan demikian

$$\int_0^4 (x^2+x)^{1/2}(2x+1)\,dx = \int_0^{20} u^{1/2}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^{20} = \tfrac{2}{3}(20)^{3/2},$$

sama seperti yang kita peroleh sebelumnya.

Catatan. Dalam menghitung integral tentu dengan teknik substitusi, kedua batas integral pada umumnya berubah dan kita dapat menghitung integral dalam peubah baru tanpa harus mensubstitusikan kembali peubah lama.

Secara umum, dengan melakukan substitusi u = g(x), du = g'(x)dx, kita peroleh

Integral tak tentu: $\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)\, du.$

Integral tentu: $$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Latihan. Hitung integral tentu/tak tentu berikut:

1. $\int \sqrt{3x + 2}\, dx.$
2. $\int \cos(3x + 2)\, dx.$
3. $\int_0^1 (3x+2)^3\, dx.$
4. $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$
5. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(\sqrt{t}+1)^3}\, dt.$

SOAL-SOAL BAB V

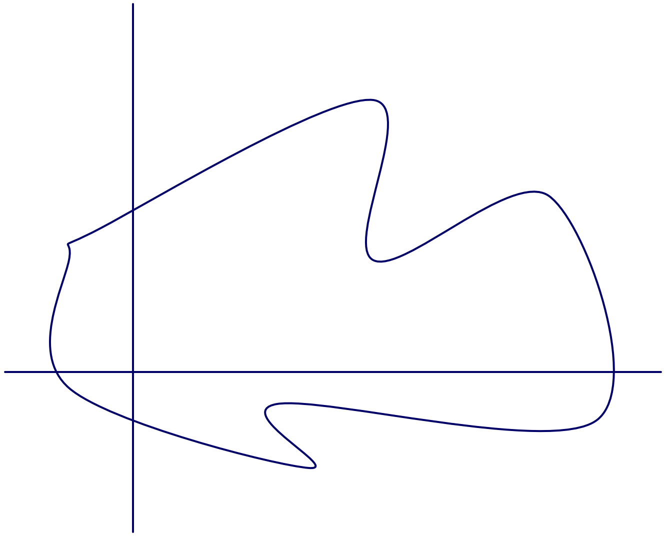
5.1 no. 1, 5, 10, 15, 22, 23, 32, 33.
5.2 no. 5, 13, 15.
5.3 no. 1, 9, 21, 25.
5.4 no. 19.
5.5 no. 1, 11, 21, 25.
5.6 no. 1, 7, 12, 15, 22.
5.7 no. 1, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 30.
5.8 no. 5, 8, 17, 20, 25, 32.

BAB. VI PENGGUNAAN INTEGRAL

- Luas Daerah di Bidang
- Volume Benda Pejal di Ruang:
  - Metode Cincin
  - Metode Kulit Tabung
  - Metode Irisan Sejajar
- Momen dan Pusat Massa

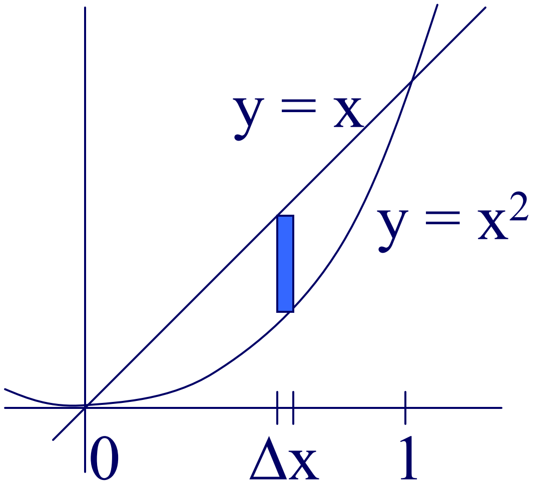
Luas Daerah di Bidang

Diketahui daerah di bidang seperti pada gambar di samping, bagaimana kita dapat menghitung luas daerah tersebut?



Pada prinsipnya, kita dapat membagi daerah tersebut menjadi beberapa bagian, di mana tiap bagian merupakan daerah di antara dua kurva. Jadi persoalannya adalah bagaimana menghitung luas daerah di antara dua kurva, yang akan dibahas selanjutnya.

Contoh 1. Hitung luas daerah (tertutup) yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x$.



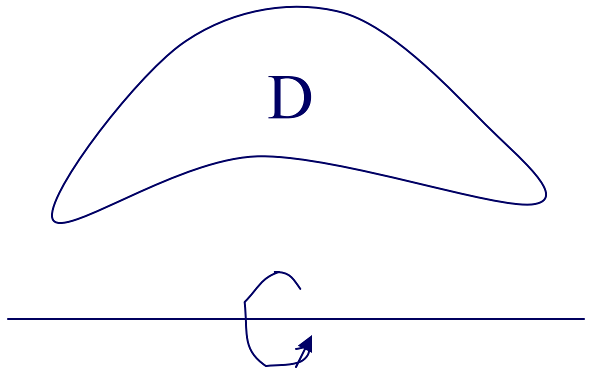
<u>Jawab</u>: Misal kita 'iris' daerah tersebut secara vertikal, dan tiap irisannya mempunyai lebar Δx dan tinggi kira-kira sama dengan $x - x^2$, sehingga luasnya adalah $\Delta L \approx (x - x^2)\Delta x$ (lihat gambar). Jadi, luas daerah tersebut secara keseluruhan adalah $L \approx \sum_x (x - x^2)\Delta x$. Ambil limitnya, kita peroleh

$$L = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

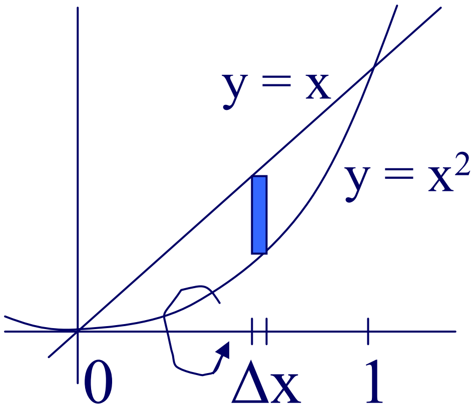
Latihan. Hitung luas daerah di Kuadran I yang dibatasi oleh kurva $y = 2 - x^2$, garis $y = x$, dan sumbu-x. (*Petunjuk*. Setelah anda menggambar daerah yang dimaksud, irislah daerah tersebut secara *horisontal* dan taksir luas tiap irisannya.)

Volume Benda Pejal di Ruang; Metode Cincin

Bila suatu daerah D diputar mengelilingi sebuah sumbu, maka akan diperoleh suatu benda putar. Bagaimana menghitung volumenya?



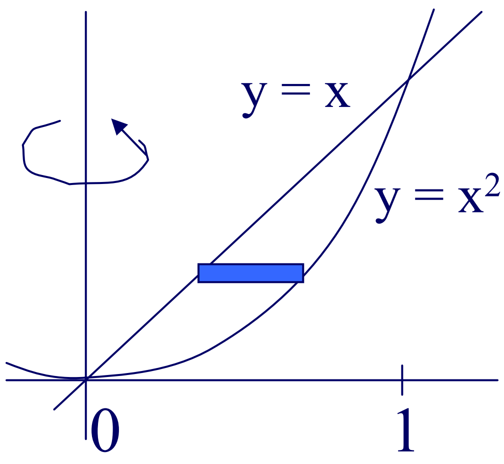
Contoh 2. Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi sumbu-x. Hitung volume benda putar yang terbentuk.



<u>Jawab</u>: Tiap irisan membentuk cincin dengan jari-jari luar x^2, jari-jari dalam x^4, dan tebal Δx, yang volume-nya adalah $\Delta V \approx \pi(x^2 - x^4)\Delta x$. Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

Latihan. Daerah pada Contoh 2 diputar mengelilingi sumbu-y. Hitung volume benda putar yang terbentuk. (*Petunjuk*. Iris daerah tersebut secara *horisontal* dan taksir volume cincin yang terbentuk dari tiap irisannya.)

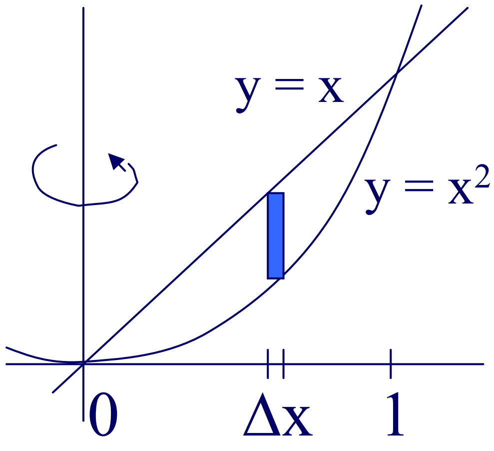


Metode Kulit Tabung

Volume benda putar pada soal latihan di atas dapat pula dihitung dengan Metode Kulit Tabung sebagai berikut. Iris daerahnya secara vertikal, sehingga tiap irisannya akan membentuk suatu kulit tabung dengan jari-jari x, tinggi $x - x^2$, dan tebal Δx. Volume kulit tabung tsb adalah

$$\Delta V \approx 2\pi x(x - x^2)\Delta x.$$

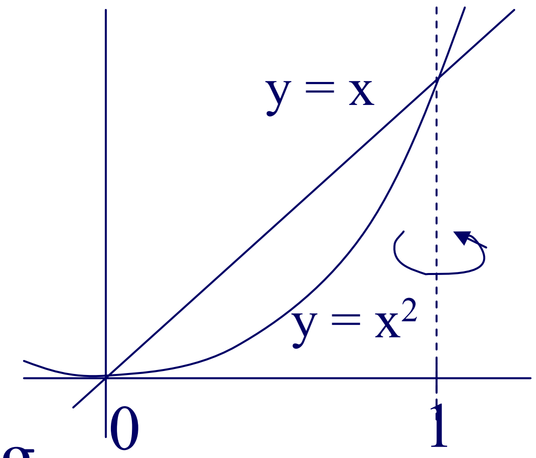
Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh



$$V = \int_0^1 2\pi x(x - x^2)\,dx.$$

Anda dapat menghitung integral ini dan bandingkan hasilnya dengan hasil yang Anda peroleh dengan Metode Cincin.

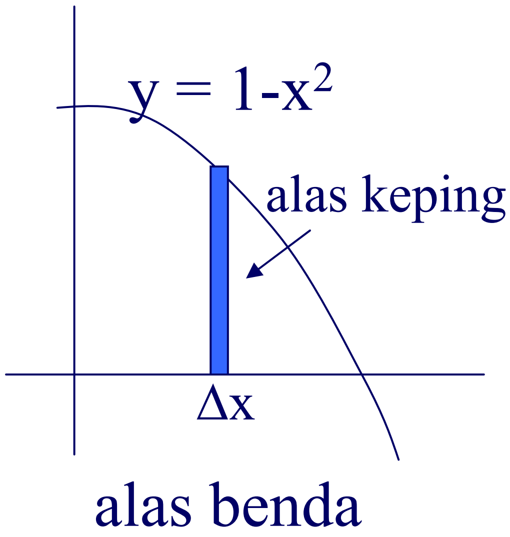
<u>Latihan</u>. Hitung volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi garis $x = 1$, dengan (a) Metode Cincin dan (b) Metode Kulit Tabung.



Metode Irisan Sejajar

Benda putar memiliki penampang berbentuk cakram atau cincin. Volume benda dengan penampang tertentu secara umum dapat dihitung dengan Metode Irisan Sejajar.

Contoh 3. Alas sebuah benda adalah daerah di Kuadran I yang dibatasi oleh kurva $y = 1 - x^2$, sumbu-x, dan sumbu-y. Penampangnya yang tegak lurus terhadap sumbu-x berbentuk bujursangkar. Hitung volume benda tersebut.

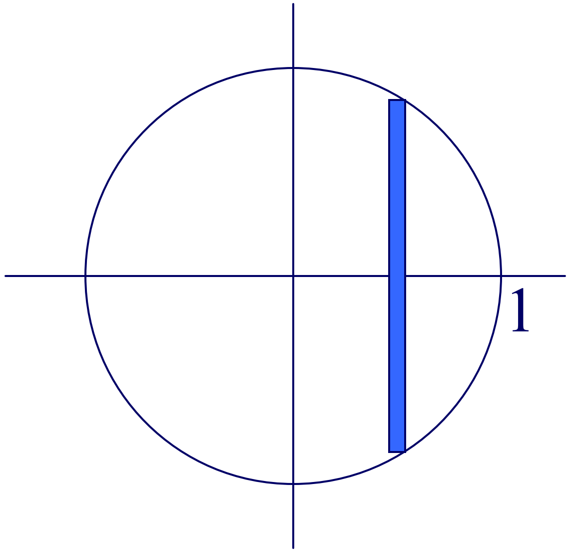


<u>Jawab</u>: Iris benda tersebut secara tegak lurus ter-hadap sumbu-x. Maka, tiap irisannya berbentuk seperti keping bujursangkar dengan panjang sisi $1 - x^2$ dan tebal Δx, sehingga volumenya adalah $\Delta V \approx (1 - x^2)^2 \Delta x$. Jumlahkan dan ambil limitnya,

kita peroleh volume benda tersebut

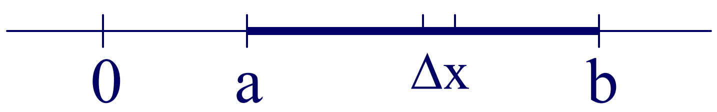
$$V = \int_0^1 (1 - x^2)^2 \, dx = \tfrac{8}{15}.$$

Latihan. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$. Penampangnya yang tegak lurus terhadap sumbu-x berbentuk bujursangkar. Hitung volume benda tersebut.



Momen dan Pusat Massa

Misalkan kita mempunyai kawat yang kita letakkan pada garis bilangan real sehingga menutupi selang [a,b]. Misalkan diketahui rapat massa kawat tersebut di titik x adalah $\rho(x)$. Maka, massa potongan kawat yang lebarnya Δx kurang-lebih akan sama dengan $\Delta m \approx \rho(x)\Delta x$.



Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh massa kawat tersebut:

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Kita juga dapat menghitung momennya terhadap titik 0. (Momen = jarak × massa.) Pertama, momen tiap potongan kawat dengan lebar Δx terhadap 0 adalah $\Delta M \approx x\rho(x)\Delta x$. Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh momen kawat tersebut terhadap 0:

$$M = \int_a^b x\rho(x)dx.$$

Dengan mengetahui massa kawat dan momennya terhadap 0, kita dapat menentukan pusat massanya, yakni

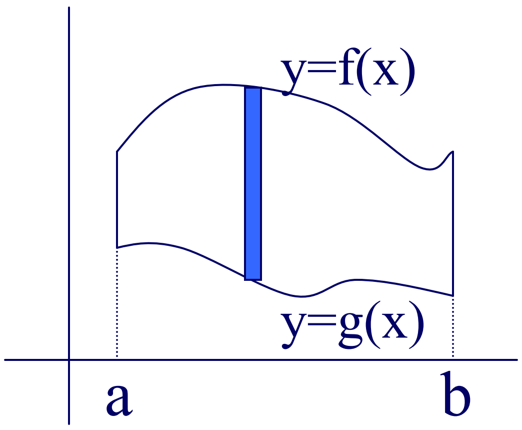
$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}.$$

Contoh 4. Diketahui kawat dengan panjang 10 cm dan rapat massa di setiap titik sama dengan 3 kali kuadrat jarak titik tsb dari salah satu ujung kawat. Tentukan massa dan pusat massa kawat tersebut.

Jawab: Kita letakkan kawat tersebut sehingga menempati selang [0,10] pada garis bilangan real. Maka, rapat massanya di titik x adalah $\rho(x) = 3x^2$. Massa kawat tersebut dan momenya terhadap 0 adalah

$$m = \int_0^{10} 3x^2 dx = 1000; \qquad M = \int_0^{10} 3x^3 dx = 7500.$$

Jadi, pusat massanya adalah 7,5 cm dari ujung kiri.



Sekarang misalkan kita mempunyai suatu keping homogen (rapat massanya ρ konstan) yg menempati daerah D yang terletak di antara dua kurva, sebut y = *f*(x) dan y = *g*(x), seperti pada gambar. Iris daerah D secara vertikal. Maka, massa, momen terhadap sumbu-y, dan momen terhadap sumbu-x dari tiap irisannya adalah

$$\Delta m \approx \rho\left[f(x) - g(x)\right]\Delta x;$$

$$\Delta M_y \approx x\rho\left[f(x) - g(x)\right]\Delta x;$$

$$\Delta M_x \approx \tfrac{1}{2}\rho\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]\Delta x.$$

Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh massa keping dan momennya terhadap kedua sumbu ko-ordinat, yakni

$$m = \rho\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx;$$

$$M_y = \rho\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]dx;$$

$$M_x = \tfrac{1}{2}\rho\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx.$$

Koordinat pusat massa keping tersebut adalah

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Contoh 5. Diketahui keping homogen dengan rapat massa 1 yang menempati daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$. Tentukan massa dan pusat massa keping tersebut.

Jawab. Massa keping tersebut adalah

$$m = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Momennya terhadap kedua sumbu koordinat adalah

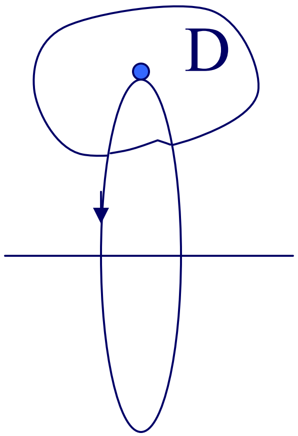
$$M_y = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\,dx = \tfrac{3}{20};$$

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)\,dx = \tfrac{3}{20}.$$

Dengan demikian pusat massanya adalah (9/10,9/10). (Di sini pusat massanya terletak pada garis $y = x$, yang merupakan sumbu simetri keping tersebut.)

<u>Latihan</u>. Tentukan massa dan pusat massa keping setengah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ bagian atas.

Teorema Pappus. Jika suatu daerah D pada bidang diputar mengelilingi suatu sumbu yang tidak me-motong D, maka volume benda putar yang terbentuk sama dgn luas daerah D kali keliling lingkaran yang ditempuh oleh titik pusat massa D.



SOAL-SOAL BAB VI

6.1 no. 3, 9, 11, 15, 25.
6.2 no. 1, 9, 13, 19, 27, 32, 33.
6.3 no. 8, 9, 11, 15.
6.8 no. 11, 19, 24.

Catatan. Bagian 6.4 - 6.7 tidak dibahas.