TEOREMA PEMBATASAN DIMENSI DUA

Hendra Gunawan
Jurusan Matematika ITB
Jl. Ganesha 10 Bandung

Abstrak
Dalam makalah ini kami buktikan teorema pembatasan dimensi dua dengan menggunakan ketaksamaan Babenko-Hausdorff-Young dan Hardy-Littlewood-Sobolev.

Abstract
In this paper we prove the two-dimensional restriction theorem using the Babenko-Hausdorff-Young and the Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities.

Pendahuluan

Untuk sebarang $\lambda > 0$, didefinisikan operator integral berosilasi T_λ, yang memetakan fungsi pada $\mathbf{R}^{n-1}$ ke fungsi $\mathbf{R}^n$, sebagai berikut

$$T_\lambda f(\xi) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} \psi(x,\xi) f(x)dx, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n .$$

Di sini Φ merupakan fungsi fasa yang mulus (*smooth*), bernilai real, dan memenuhi suatu persyaratan *non-degeneracy*; sementara ψ adalah fungsi yang mulus dan mempunyai tumpuan (*support*) kompak dalam x dan ξ. Maka[5] (lihat hal 375), kita mempunyai estimasi

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \le C\lambda^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^{n-1})},$$

untuk $1 \le p \le 2$ dan $q = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)p'$ (p' menyatakan eksponen dual p, yakni $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$). Dengan hasil ini, kita dapat membuktikan teorema pembatasan berikut

Teorema[5]

Misalkan $S \subset \mathbf{R}^n$ suatu manifold berdimensi n-1 dengan kurvatur Gauss tak nol dimana-mana, dan misalkan S_0 himpunan bagian kompak dari S. Maka,

$$\left(\int_{S_0} \left|\hat{f}(\xi)\right|^q d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{q}} \le C_{S_0} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)},$$

untuk $1 \le p \le \frac{2n+2}{n+3}$ *dan* $q = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)p'$.

Untuk $n = 2$, hasil di atas tidak optimal: daerah nilai p masih dapat diperluas lagi. Di bawah ini kami sajikan hasilnya.

Teorema Pembatasan Dimensi Dua.

Misalkan Γ suatu kurva mulus di $\mathbf{R}^2$ (ϕ'' kontinue) dengan parametrisasi

$$\Gamma = \{(t, \phi(t)) : t \in [0,1]\}$$

dengan $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ dan $\phi''(t) \neq 0$ untuk setiap $t \in [0,1]$. Definisikan operator R sebagai berikut

$$Rf(\xi) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-2\pi i \xi \cdot \xi} f(x)dx, \qquad \xi \in \Gamma,$$

untuk sebarang fungsi mulus f pada $\mathbf{R}^2$. Rf merupakan pembatasan transformasi Fourier f pada Γ.

Kita mempunyai teorema berikut.

Teorema [3,6)]

Ketaksamaan

$$\|Rf\|_{L^q(\Gamma)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}$$

berlaku untuk $1 \leq p \langle \tfrac{4}{3} dan 3q = p'$.

Perhatikan bahwa daerah nilai p pada teorema di atas lebih luas daripada daerah nilai p pada teorema sebelumnya.

Dalam buku[5)], teorema di atas dibuktikan dengan memanfaatkan estimasi untuk T_λ. Kami sekarang akan membuktikannya langsung dengan menggunakan ketaksamaan Babenko-Hausdorff-Young dan Hardy-Littlewood-Sobolev, seperti yang disarankan oleh[4)]. Simak bahwa bukti yang kami berikan menawarkan konstanta $C_{p,q}$ yang lebih baik.

Bukti Teorema.

Mengingat bahwa sebuah operator terbatas jika dan hanya jika *adjoint*-nya terbatas, dan bahwa norma mereka sama, cukup kita buktikan ketaksamaan yang ekivalen dengan ketaksamaan di atas, yaitu

$$\|Sf\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\Gamma)},$$

dengan $S = R^*$ menyatakan adjoint R, yakni

$$Sf(x) = \int_\Gamma e^{2\pi x \cdot \xi} f(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbf{R}^2 .$$

Catat bahwa kita telah menamai kembali p dan q yang muncul di atas.

Menggunakan parametrisasi untuk Γ, kita dapat menuliskan

$$Sf(x_1, x_2) = \int_0^1 e^{2\pi i (x_1 t + x_2 \phi(t))} F(t)dt$$

dengan $F(t) = f(t, \phi(t))(1 + \phi'(t)^2)^{1/2}$ Lalu tinjau

$$(Sf)^2(x_1,x_2) = \int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i(x_1(t_1+t_2)+x_2(\phi(t_1)+\phi(t_2))}F(t_1)F(t_2)dt_1dt_2.$$

Selanjutnya lakukan perubahan variabel

$$u_1 = t_1 + t_2 \text{ dan } u_2 = \phi(t_1) + \phi(t_2)$$

Di sini

$$J = \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(t_1,t_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi'(t_1) & \phi'(t_2) \end{vmatrix} = \phi'(t_2) - \phi'(t_1).$$

Untuk $t_1 \neq t_2$, kita mempunyai

$$\left|\frac{\phi'(t_2)-\phi'(t_1)}{t_2-t_1}\right| = |\phi''(\tau)| \geq C_\Gamma \rangle 0,$$

dan karenanya

$$|\phi'(t_2)-\phi'(t_1)| \geq C_\Gamma\,|t_2-t_1|.$$

Mengingat pemetaan $(t_1,t_2) \to (u_1,u_2)$ merupakan pemetaan dua-ke-satu, maka kita peroleh

$$(Sf)^2(x) = \int_D e^{2\pi i x\cdot u}G(u)du,$$

untuk suatu daerah $D \subset \mathbf{R}^2$, dengan

$$G(u_1,u_2) = \frac{2F(t_1)F(t_2)}{|\phi'(t_1)-\phi'(t_2)|}, \quad t_1 = t_1(u_1,u_2), t_2 = t_2(u_1,u_2).$$

Jadi, kita peroleh

$$(Sf)^2 = (\hat{G}_0)^{\sim},$$

dengan $G_0(u) = G(u)$ jika $u \in D = 0$ jika $u \notin D$, dan $^{\sim}$ menyatakan refleksi.

Menggunakan ketaksamaan Babenko-Hausdorff-Young, kita peroleh

$$\|\hat{G}_0\|_{L^{r'}(\mathbf{R}^2)} \leq B_r^2\|G_0\|_{L^r(\mathbf{R}^2)},$$

untuk $1 \leq r \leq 2$, dengan $B_r = \left(r^{1/r}/r'^{1/r'}\right)^{1/2}$. Ketaksamaan ini ekivalen dengan

$$\|Sf\|^2_{L^{2r'}(\mathbf{R}^2)} \leq B_r^2\left(\int_D |G(u)|^r du\right)^{1/r},$$

untuk $1 \leq r \leq 2$. Tetapi

$$\int_D |G(u)|^r du = \int_0^1\int_0^1 |F(t_1)|^r|F(t_2)|^r|J|^{1-r}dt_1dt_2$$
$$\leq C_\Gamma\int_0^1\int_0^1 |F(t_1)|^r|t_1-t_2|^{1-r}dt_1|F(t_2)|^r dt_2.$$

Menurut ketaksamaan Hölder,

$$\int_D |G(u)|^r du \leq C_\Gamma\left(\int_0^1\left(\int_0^1 |F(t_1)|^r|t_1-t_2|^{1-r}dt_1\right)^{s'}dt_2\right)^{1/s'}\left(\int_0^1 |F(t_2)|^r sdt_2\right)^{1/s},$$

asalkan $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1$, dengan s, $s' \geq 1$. Dalam hal ini kita pilih $s = \frac{2}{3-r}$, sehingga $\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + r - 2$. Akibatnya, menurut ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev[5)] (lihat hal 354),

$$\left(\int_0^1\left(\int_0^1 \left|F(t_1)\right|^r \left|t_1 - t_2\right|^{1-r} dt_1\right)^{s'} dt_2\right)^{1/s'} \leq C_{HLS}\left(\int_0^1 \left|F(t_1)\right|^{rs} dt_1\right)^{1/s},$$

asalkan $1 \leq r \leq 2$. Dengan demikian kita peroleh

$$\int_D \left|G(u)\right|^r du \leq C_\Gamma C_{HLS}\left(\int_0^1 \left|F(t)\right|^{rs} dt\right)^{2/s} \leq C_\Gamma C_{HLS}\left\|f\right\|_{L^p(\Gamma)}^{2r},$$

dengan $p = rs$. Ini memberikan

$$\left\|Sf\right\|_{L^{2r'}(\mathbf{R}^2)} \leq C_\Gamma C_{HLS} B_r \left\|f\right\|_{L^p(\Gamma)},$$

dengan $p = \frac{2r}{3-r}$. Untuk $1 \leq r \langle 2$, kita mempunyai $1 \leq p \langle 4$. Jadi, mengingat $2r' = 3p'$, kita peroleh

$$\left\|Sf\right\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \leq C_\Gamma C_{HLS} B_{\frac{3p}{2+p}} \left\|f\right\|_{L^p(\Gamma)},$$

untuk $1 \leq p \langle 4$ dan $q = 3p'$. Ketaksamaan ini ekivalen dengan

$$\left\|Rf\right\|_{L^q(\Gamma)} \leq C_\Gamma C_{HLS} B_{\frac{3q'}{2+q'}} \left\|f\right\|_{L^p(\mathbf{R}^2)},$$

untuk $1 \leq p \langle \frac{4}{3}$ dan $3q = p'$, seperti yang dinyatakan dalam teorema.

Catatan :

Perlu dicatat bahwa konstanta C_Γ dan C_{HLS} yang muncul di atas mungkin berubah dari baris ke baris, tetapi mereka selalu bergantung hanya pada kurva Γ dan pada potensial Riesz I_{2-r}. Sementara itu, konstanta B_r dikenal sebagai konstanta Babenko, yang kita tahu merupakan konstanta terkecil yang memenuhi ketaksamaan Hausdorff-Young[1,2].

Ucapan Terima Kasih

Makalah ini mulai disusun ketika penulis berkunjung ke Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, pada bulan Juni-Juli 1985. Perkenankan penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada Dr. Amir A. Kamaly selaku *counterpart* selama kunjungan tersebut.

Daftar Pustaka

1. K.I. Babenko, "An Inequality in the Theory of Fourier Integrals", *Amer.Math.Soc.Transl.* (2) **44** (1965), 115-128.
2. W. Beckner, "Inequalities in Fourier Analysis", *Annals of Math*. **102** (1975), 159-182.
3. C. Fefferman, "Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators", *Acta Math*. **124** (1970), 9-36.
4. P. Sjölin, "Lecture Notes on Fourier Analysis", Royal Inst. of Tech. Stockholm, 1994.
5. E.M. Stein, "Harmonic Analysis", Princeton Univ. Press, 1993.
6. A. Zygmund, "On Fourier Coefficients and Transforms of Functions of Two Variables", *Studia Math*. **50** (1974), 189-202.