ANALISIS NUMERIK LANJUT

Hendra Gunawan, Ph.D.

2006/2007

Teorema Deret Geometri

Misal V ruang Banach, L є BL(V) dengan $||L||$ < 1. Maka, $I – L$ merupakan bijeksi pada V, dan inversnya juga linear dan terbatas dgn $||(I – L)^{-1}|| \leq (1 – ||L||)^{-1}$.

Bukti. Def.kan $M_n = \sum_{i=0..n} L^i$. Tunjukkan bhw (M_n) Cauchy, dan karenanya konvergen ke suatu M di BL(V). Juga $(I – L)M_n = M_n(I – L) = I – L^{n+1}$, sehingga $(I – L)M = M(I – L) = I$, yang berarti $I – L$ bijektif dan $(I – L)^{-1} = M$. Selanjutnya, $||M_n|| \leq \sum_{i=0..n} ||L||^i \leq (1 – ||L||)^{-1}$.

- Teorema Deret Geometri (TDG) mengatakan bahwa, bila hipotesisnya dipenuhi, maka untuk tiap $f \in V$, persamaan $(I - L)u = f$ mempunyai solusi $u = (I - L)^{-1}f$.
- Lebih jauh, solusinya bergantung secara kontinu terhadap f: Jika $(I - L)u_1 = f_1$ dan $(I - L)u_2 = f_2$, maka $||u_1 - u_2|| \leq c.||f_1 - f_2||$, dengan $c = (1 - ||L||)^{-1}$.

Contoh 1:

Tinjau persamaan integral

$$\lambda u(x) - \int_{[a,b]} k(x,y)u(y)dy = f(x), \quad a \le x \le b,$$

dengan $\lambda \neq 0$, $k(x,y)$ kontinu, dan $f \in C[a,b]$.

Misal $V = C[a,b]$ dengan norma $\| \cdot \|_\infty$. Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$(\lambda I - K)u = f,$$

dengan K operator integral linear yang dibangun oleh kernel $k(x,y)$. Bagi kedua ruas dengan λ, kita peroleh

$$(I - L)u = f/\lambda.$$

dengan $L = K/\lambda$. Jika $\|K\| < |\lambda|$, maka $(I - L)^{-1}$ ada dan

$$\|(I - L)^{-1}\| \le (1 - \|L\|)^{-1} \text{ atau } \|(\lambda - K)^{-1}\| \le (|\lambda| - \|K\|)^{-1}.$$

Dalam hal ini, persamaan di atas mempunyai solusi tunggal $u \in C[a,b]$ dengan $\|u\|_\infty \le (|\lambda| - \|K\|)^{-1} \cdot \|f\|_\infty$.

Deret Operator

- $(I - L)^{-1} = \sum L^n, \quad ||L|| < 1.$
- $e^L = \sum L^n/n!$
- $\mathrm{Sin}(L) = \sum (-1)^n L^{2n+1}/(2n+1)!$
- $\mathrm{Arctan}(L) = \sum (-1)^n L^{2n+1}/(2n+1), \quad ||L||<1$
- …

Teorema Deret Geometri yg Diperumum

- Misal V ruang Banach, $L \in BL(V)$, dan $||L^m|| < 1$ untuk suatu $m \geq 1$. Maka, $I - L$ merupakan bijeksi pada V, dan inversnya juga linear dan terbatas dgn $||(I - L)^{-1}|| \leq (1 - ||L^m||)^{-1} \sum_{i=0..(m-1)} ||L^i||$.

- <u>Catatan</u>: Untuk m = 1, kita peroleh TDG yang telah dibahas sebelumnya.

Contoh 2:

Tinjau persamaan integral

$$u(x) - \int_{[0,x]} l(x,y)u(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le B,$$

dengan l(x,y) kontinu untuk $0 \le y \le x \le B$ dan f є C[0,B].

Persamaan ini dapat dituliskan sebagai

$$(I - L)u = f,$$

dengan $Lu(x) = \int_{[0,x]} l(x,y)u(y)dy$.

Di sini L є BL(V), dengan V = C[0,B]. Selanjutnya dapat ditunjukkan bhw $||L^k|| \le M^k.B^k/k!$, dengan $M = \text{maks}\{|l(B,y)| : 0 \le y \le B\}$. Karena $M^kB^k/k! \to 0$ bila $k \to \infty$, mestilah $||L^m|| < 1$ untuk suatu $m \ge 1$.

Jadi hipotesis TDG yang diperumum terpenuhi, dan karenanya kesimpulannya pun berlaku.

Soal:

Misal hipotesis TDG dipenuhi. Maka, untuk tiap $f \in V$, persamaan $(I - L)u = f$ mempunyai solusi tunggal $u \in V$.

(a) Tunjukkan bahwa solusi ini dapat dihampiri oleh barisan $\{u_n\}$, yang didefinisikan sbb:

$$u_0 \in V \text{ dan } u_n = f + Lu_{n+1}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

(b) Tentukan kesalahan penaksirannya, yaitu $||u - u_n||$.

Teorema Perturbasi

Misal V dan W ruang bernorma, salah satunya lengkap; L є BL(V,W) mempunyai invers $L^{-1} : W \rightarrow V$ yang terbatas; dan M є BL(V,W) memenuhi $||M - L|| \leq ||L^{-1}||^{-1}$. Maka $M : V \rightarrow W$ merupakan suatu bijeksi, M^{-1} є BL(W,V), dan

$$||M^{-1}|| \leq ||L^{-1}||.[1 - ||L^{-1}||.||L - M||]^{-1}.$$

Teorema Perturbasi mengatakan bhw operator yang dekat ke operator yang mempunyai invers terbatas juga akan mempunyai invers terbatas.

Contoh 3:

Persamaan integral

$$\lambda u(x) - \int_{[0,1]} \sin(xy)\, u(y)\, dy = f(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

dapat dipandang sebagai perturbasi dari persamaan integral

$$\lambda u(x) - \int_{[0,1]} (xy)\, u(y)\, dy = f(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

karena $\sin(xy) \approx xy$ untuk $|xy| \approx 0$. Lihat Buku Atkinson & Han, hal. 52-53.

Lebih jauh tentang Operator Linear

- Teorema Perluasan (hal. 55)
- Teorema Pemetaan Terbuka (hal. 57)
- Prinsip Keterbatasan Seragam (hal. 58)
- Teorema Banach-Steinhaus (hal. 58):

  Misal V dan W ruang Banach, L, L_n є BL(V,W), V_0 subruang padat dari V. Maka $L_n v \rightarrow Lv$ utk tiap v є V jika dan hanya jika $L_n v \rightarrow Lv$ utk tiap v є V_0 dan sup $||L_n|| < \infty$.
- Aplikasi → Kekonvergenan Kuadratur Numerik

Fungsional Linear

Misal V ruang bernorma dan W = K (lapangan skalar). Dalam hal ini, anggota BL(V,K) disebut *fungsional linear*, dan biasanya dilambangkan dgn huruf kecil spt *l atau f*. Karena K lengkap, BL(V,K) merupakan ruang Banach. Ruang V’ := BL(V,K) dikenal sbg *ruang dual* dari V.

Contoh: Ruang dual dari $L^p(\Omega)$ adalah $L^{p'}(\Omega)$ dengan $1/p + 1/p' = 1$.

Teorema Hahn-Banach

Misal V_0 subruang dari suatu ruang bernorma V, dan $f : V_0 \rightarrow K$ linear dan terbatas. Maka f dapat diperluas ke $f^* : V \rightarrow K$, dengan $f^*(v) = f(v)$ utk tiap $v \in V_0$, sedemikian shg $||f^*|| = ||f||$.

Teorema Representasi Riesz

Misal V ruang Hilbert dan f є V'. Maka terdapat tepat sebuah u є V sehingga f(v) = (v,u) utk tiap v є V dan ||f|| = ||u||.

Catatan: Teorema di atas mengatakan bha setiap anggota V' dpt diidentifikasi sbg anggota V.

Operator Adjoin

Misal V dan W ruang Hilbert, dan $L \in BL(V,W)$. *Operator adjoin* $L^* : W \rightarrow V$ didefinisikan melalui

$$(Lv,w)_W = (v,L^*w)_V, \quad v \in V,\ w \in W.$$

Di sini $L^* \in BL(W,V)$ dan $\|L^*\| = \|L\|$.

<u>Catatan</u>: Eksistensi operator adjoin ini dijamin oleh Teorema Representasi Riesz (lihat Atkinson & Han, hal. 67).

Contoh:

Misal V, W = $L^2(a,b)$ atas K = **R**. Tinjau operator integral linear

$$Kv(x) = \int_{[a,b]} k(x,y)\, v(y)\, dy, \quad a \leq x \leq b,$$

dengan $k \in L^2([a,b]\times[a,b])$. Maka K є BL(V,W), dan operator adjoin-nya adalah

$$K^*v(x) = \int_{[a,b]} k(y,x)\, v(y)\, dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Jika $k(x,y) = k(y,x)$, maka $K^* = K$ (yakni K ber-sifat *self-adjoint*).

Jenis-jenis Kekonvergenan

- Misal V ruang bernorma dan V’ ruang dualnya. Barisan $\{u_n\}$ di V dikatakan *konvergen kuat* ke u є V, ditulis $u_n \rightarrow u$, jhj lim $||u - u_n|| = 0$. Barisan $\{u_n\}$ di V dikatakan *konvergen lemah* ke u є V, ditulis u_n -- u, jhj $f(u_n) \rightarrow f(u)$ utk tiap f є V’.

- **Contoh**: Di $L^2(0,2\pi)$, $\{\sin(nx)\}$ konvergen lemah, tapi tidak konvergen kuat, ke 0.

Kekonvergenan Barisan Operator

- Misal V dan W ruang bernorma. Barisan operator linear $\{L_n\}$ dari V ke W dikatakan *konvergen kuat* ke operator linear $L : V \rightarrow W$, ditulis $L_n \rightarrow L$, jhj $\lim ||L_n - L|| = 0$. Barisan $\{L_n\}$ dikatakan *konvergen *-lemah* ke L, ditulis un --* u, jhj $\lim L_n v = Lv$ utk tiap $v \in V$.

- **Latihan**: Soal 2.7.1-2 di Buku Atkinson & Han.