KETAKSAMAAN OLSEN UNTUK OPERATOR RIESZ YANG DIPERUMUM

Oleh

Hendra Gunawan* dan Yudi Soeharyadi

Institut Teknologi Bandung
Bandung, Indonesia

dipresentasikan pada
Konferensi Nasional Matematika XIII,
di Semarang, 24-27 Juli 2006

Abstrak. Ketaksamaan Olsen menyatakan bahwa operator multiplikasi yang dikenakan pada operator Riesz merupakan operator yang terbatas dari L^p ke L^p, jika diketahui multiplikatornya berada di ruang Lebesgue tertentu. Dalam seminar ini akan dibahas perluasan dari ketaksamaan ini di ruang Morrey. Lebih jauh, ketaksamaan serupa untuk operator Riesz yang diperumum di ruang Morrey yang diperumum akan dibuktikan. Hasil yang dipresentasikan dalam seminar ini merupakan hasil kerjasama dengan Eridani (Unair).

Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev

Untuk $0 < \alpha < n$, **operator Riesz** atau operator integral fraksional I_α, yang didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

merupakan operator terbatas dari $L^p(\mathbf{R}^n)$ ke $L^q(\mathbf{R}^n)$ dengan $1/p - 1/q = \alpha/n$, $1 < p < q < \infty$.

Persisnya, kita mempunyai ketaksamaan

$$\|I_\alpha f\|_q \le C_{p,q} \|f\|_p,$$

yang dikenal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev ([S], h. 354).

Ketaksamaan H-L-S dapat dibuktikan sebagai berikut. Tulis

$$I_\alpha f(x) := I_1(x) + I_2(x)$$

dengan

$$I_1(x) := \int_{|x-y|<R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy;$$

$$I_2(x) := \int_{|x-y|>R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy.$$

Untuk sementara, nilai R bebas.

Untuk integral pertama, kita mempunyai hampiran

$$|I_1(x)| \leq C.R^{\alpha} Mf(x),$$

di mana Mf adalah **fungsi maksimal Hardy-Littlewood**, yang didefinisikan sebagai

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

Lihat [G] untuk mendapatkan gagasannya.

Teorema (H-L): $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p,\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$.

Dengan ketaksamaan Holder, integral kedua memenuhi

$$|I_2(x)| \leq C.R^{-n/q}\|f\|_p$$

Dengan demikian kita peroleh

$$|I_\alpha(x)| \leq C.[R^\alpha Mf(x) + R^{-n/q}\|f\|_p].$$

Sekarang pilih $R = R(x)$ sehingga $R^\alpha Mf(x) = R^{-n/q}\|f\|_p$. Untuk nilai R ini, kita peroleh

$$|I_\alpha(x)| \leq C.[Mf(x)]^{p/q}\|f\|_p^{1-p/q}.$$

Selanjutnya tinggal menaksir $\int_{\mathbf{R}^n} |I_\alpha(x)|^q \, dx$, dengan menggunakan Teorema H-L untuk Mf.

Ketaksamaan Olsen

Misalkan p, q dan α seperti tadi. Maka,

$$\frac{\alpha p}{n} + \frac{p}{q} = 1.$$

Teorema (Olsen): Jika $W \in L^{n/\alpha}$, maka operator multiplikasi $W.I_\alpha$, yakni

$$f \mapsto W.I_\alpha f,$$

terbatas di $L^p(\mathbf{R}^n)$, dengan

$$\|W.I_\alpha f\|_p \leq C.\|W\|_{n/\alpha}\|f\|_p.$$

Bukti. Gunakan ketaksamaan Holder dan ketaksamaan H-L-S.

Catatan. Ketaksamaan Olsen dapat digunakan untuk mempelajari perilaku operator Schrodinger, lihat [KNS].

Ketaksamaan Adams-Chiarenza-Frasca

Dalam [A] dan [CF], diperlihatkan bahwa I_α juga terbatas dari ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ ke $L^{q,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ dengan $1/p - 1/q = \alpha/(n-\lambda)$, $0 \leq \lambda < n - \alpha p$.

Ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan lokal pada $\mathbf{R}^n$ dengan

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_B \Big(\frac{1}{r^\lambda}\int_B |f(y)|^p dy\Big)^{1/p} < \infty,$$

di mana supremum diambil atas semua bola $B = B(a,r)$ di $\mathbf{R}^n$ dan $|B|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari B.

Perhatikan bahwa $L^{p,0}(\mathbf{R}^n) = L^p(\mathbf{R}^n)$. Dengan mengambil $\lambda = 0$, diperoleh kembali keterbatasan I_α dari $L^p(\mathbf{R}^n)$ ke $L^q(\mathbf{R}^n)$.

Teorema (C-F): $\|Mf\|_{p,\lambda} \le C_{p,\lambda}\|f\|_{p,\lambda}$.

Teorema (A-C-F): $\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \le C_{p,q}\|f\|_{p,\lambda}$.

Bukti. Gagasannya serupa dengan sebelumnya. Tulis

$$I_\alpha f(x) := I_1(x) + I_2(x)$$

dengan

$$I_1(x) := \int_{|x-y|<R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy;$$

$$I_2(x) := \int_{|x-y|>R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy,$$

lalu taksir masing-masing integral, dan pilih R yang optimal sehingga diperoleh ketaksamaan yang diinginkan, dengan menggunakan teorema sebelumnya tentang Mf.

Ketaksamaan Olsen di Ruang Morrey

Misalkan p, q, α dan λ seperti tadi. Maka

$$\frac{\alpha p}{n-\lambda} + \frac{p}{q} = 1.$$

Teorema (Olsen): Jika $W \in L^{(n-\lambda)/\alpha,\lambda}$, maka operator multiplikasi $W.I_\alpha$, yakni

$$f \mapsto W.I_\alpha f,$$

terbatas di $L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$, dengan

$$\|W.I_\alpha f\|_{p,\lambda} \le C.\|W\|_{(n-\lambda)/\alpha,\lambda}\|f\|_{p,\lambda}.$$

Operator Riesz yang Diperumum

Untuk fungsi $\rho : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, definisikan operator T_ρ sebagai

$$T_\rho f(x) := \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)\, dy.$$

Perhatikan jika $\rho(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < n$, maka T_ρ adalah operator Riesz I_α. Operator T_ρ pertama kali dipelajari oleh Nakai [N2].

Untuk fungsi $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dan $1 \leq p < \infty$, kita definisikan

$$\|f\|_{p,\phi} := \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

dan (untuk $p = \infty$)

$$\|f\|_{\infty,\phi} := \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \|f\|_{L^\infty(B)},$$

dengan nilai supremum diambil atas semua bola buka $B = B(a, r)$ di $\mathbf{R}^n$, $|B|$ menyatakan ukuran Lebesgue B, dan $\phi(B) = \phi(r)$.

Definisikan ruang Morrey $\mathcal{M}_{p,\phi} = \mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbf{R}^n)$, for $1 \le p \le \infty$, sebagai himpunan semua fungsi $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ dengan $\|f\|_{p,\phi} < \infty$.

Jika $\phi(t) = t^{(\lambda-n)/p}$ dengan $0 \le \lambda < n$, $1 \le p < \infty$, maka $\mathcal{M}_{p,\phi} := L^{p,\lambda} = L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$, ruang Morrey klasik.

Fungsi ϕ diasumsikan memenuhi

(*) $\quad \frac{1}{2} \le \frac{r}{s} \le 2 \Rightarrow \frac{1}{C_1} \le \frac{\phi(r)}{\phi(s)} \le C_1.$

Fungsi ϕ yang memenuhi (*) dikatakan memenuhi *the doubling condition* (dengan *konstanta pengganda* C_1). Jika ρ memenuhi the doubling condition, maka untuk tiap $k \in \mathbf{Z}$ dan $r > 0$ berlaku

$$\int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t}\, dt \sim \rho(2^k r).$$

Berkenaan dengan fungsi maksimal Hardy-Littlewood M, kita mempunyai hasil berikut dari Nakai [N1] dan akibatnya [G].

Teorema (Nakai) *Jika* ϕ *memenuhi the doubling condition dan* $\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \le C\phi(r)^p$, *untuk* $r > 0$ *dan* $1 < p < \infty$, *maka*

$$\|Mf\|_{p,\phi} \le C_p \, \|f\|_{p,\phi}.$$

Teorema (Gunawan). *Misalkan* ρ *dan* ϕ *memenuhi the doubling condition. Misalkan pula* ϕ *surjective,* $\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \le C\phi(r)^p$, *dan*

$$\phi(r) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \le C\phi(r)^{p/q},$$

untuk $r > 0$ *dan* $1 < p < q < \infty$. *Maka terdapat* $C_{p,q} > 0$ *sedemikian sehingga*

$$\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \le C_{p,q} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

yakni, T_ρ *terbatas dari* $\mathcal{M}_{p,\phi}$ *ke* $\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}$.

Akhirnya, dengan teorema tadi dan ketaksamaan Holder, kita peroleh:

Teorema. *Misalkan* ρ *dan* ϕ *memenuhi the doubling condition. Misalkan pula* ϕ *surjective,* $\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq C\phi(r)^p$, *dan*

$$\phi(r) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\phi(r)^{p/q},$$

untuk $r > 0$ *dan* $1 < p < q < \infty$. *Jika* $W \in \mathcal{M}_{s,\phi^{sp}}$, *maka terdapat* $C_{p,q} > 0$ *sedemikian sehingga*

$$\|W \cdot T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \leq C_{p,q} \|W\|_{\mathcal{M}_{s,\phi^{sp}}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}},$$

dengan $s := (q-p)/pq$.

References

[A] D.R. Adams, "A note on Riesz potentials", *Duke Math. J.* **42** (1975), 765–778.

[CF] F. Chiarenza and M. Frasca, "Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function", *Rend. Mat.* **7** (1987), 273–279.

[G] H. Gunawan, "A note on the generalized fractional integral operators", *J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)* **9**(1) (2003), 39–43.

[KNS] K. Kurata, S. Nishigaki and S. Sugano, "Boundedness of integral operators on generalized Morrey spaces and its application to Schrödinger operators", *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (1999), 1125–1134.

[N1] E. Nakai, "Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators, and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces", *Math. Nachr.* **166** (1994), 95–103.

[N2] E. Nakai, "On generalized fractional integrals", *Taiwanese J. Math.* **5** (2001), 587–602.

[S] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.