Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, Ketaksamaan Bessel, dan Kesamaan Parseval di Ruang n-Hasilkali Dalam Baku

Hendra Gunawan

Departemen Matematika, ITB, Bandung 40132

hgunawan@dns.math.itb.ac.id

Abstract

Beberapa hasil penelitian terkini tentang ruang n-hasilkali dalam, di antaranya adalah generalisasi dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz, ketaksamaan Bessel, dan kesamaan Parseval di ruang n-hasilkali dalam baku, akan disajikan.

Pendahuluan

Untuk kemudahan, kita hanya akan bekerja dengan ruang hasilkali dalam real, walaupun sesungguhnya fakta-fakta yang dikemukakan di sini berlaku di ruang hasilkali dalam kompleks.

Misalkan H ruang vektor real yang dilengkapi dengan *hasilkali dalam* $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbf{R}$, yang memenuhi

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0 \; \forall\, x \in H$; $\langle x, x \rangle = 0$ j.h.j. $x = 0$,

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \; \forall\, x, y \in H$,

(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \; \forall\, x, y \in H$, $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$, dan

(4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \; \forall\, x, y, z \in H$.

Dalam perkataan lain, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ merupakan *ruang hasilkali dalam*.

Pada $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, berlaku ketaksamaan Cauchy-Schwarz:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Selanjutnya, kita dapat mendefinisikan *norm* $\|\cdot\| : H \to \mathbf{R}$ dengan

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Periksa bahwa $\|\cdot\|$ memenuhi

(5) $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in H$; $\|x\| = 0$ j.h.j. $x = 0$,

(6) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \ \forall x \in H, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}$, dan

(7) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in H$.

Ketaksamaan pada (7) dikenal sebagai *ketaksamaan segitiga*.

Pada $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, berlaku *hukum Pythagoras*:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

asalkan $\langle x, y\rangle = 0$, dan *kesamaan polarisasi*:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle,$$

serta *hukum jajarangenjang*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Kesamaan terakhir merupakan ciri sebuah norm yang diperoleh dari hasilkali dalam.

Misalkan I suatu himpunan indeks (biasanya merupakan himpunan terhitung).

Himpunan $\{e_i : i \in I\}$, dengan $e_i \neq 0 \ \forall\, i \in I$, dikatakan *ortogonal* apabila $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ untuk setiap $i \neq j$.

Himpunan ortogonal $\{e_i : i \in I\}$ dikatakan *ortonormal* apabila $\|e_i\| = 1 \ \forall\, i \in I$.

Himpunan ortonormal $\{e_i : i \in I\}$ dikatakan *lengkap* apabila $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ untuk setiap $x \in H$.

Jika $\{e_i : i \in I\}$ merupakan himpunan ortonormal di H, maka untuk setiap $x \in H$ berlaku *ketaksamaan Bessel*:

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Jika himpunan ortonormal $\{e_i : i \in I\}$ lengkap, maka untuk setiap $x \in H$ berlaku *kesamaan Parseval*:

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2.$$

Sebaliknya juga benar: jika kesamaan Parseval berlaku, maka $\{e_i : i \in I\}$ lengkap.

Ruang n-hasilkali dalam

Misalkan H ruang vektor real berdimensi $d \geq n$ ($n \geq 2$). Sebarang fungsi bernilai real $\langle \cdot, \cdot | \cdot, \ldots, \cdot \rangle$ pada H^{n+1} yang memenuhi kelima sifat berikut:

H1. $\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle \geq 0$; $\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = 0$ jhj $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bergantung linear;

H2. $\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_1} | x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \rangle$ untuk tiap permutasi $(i_1, \ldots, i_n)$ dari $(1, \ldots, n)$;

H3. $\langle x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, x_0 | x_2, \ldots, x_n \rangle$;

H4. $\langle \alpha x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = \alpha \langle x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle, \alpha \in \mathbf{R}$;

H5. $\langle x_0 + x_0', x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle + \langle x_0', x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle$,

disebut n-*hasilkali dalam* pada H, dan pasangan $(H, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \ldots, \cdot \rangle)$ disebut *ruang* n-*hasilkali dalam*.

Pada ruang n-hasilkali dalam $(H, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \ldots, \cdot \rangle)$, berlaku ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle^2 \leq \langle x_0, x_0 | x_2, \ldots, x_n \rangle \langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle,$$

dengan kesamaan dipenuhi j.h.j. $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ x_n bergantung linear (lihat [G1]).

Selanjutnya, fungsi $\|\cdot, \ldots, \cdot\|$ yang didefinisikan pada H^n oleh

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| := \langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle^{1/2}$$

merupakan suatu n-*norm* pada H, yang memenuhi keempat sifat berikut:

N1. $\|x_1, \ldots, x_n\| \geq 0$; $\|x_1, \ldots, x_n\| = 0$ jhj $x_1, \ldots, x_n$ bergantung linear;

N2. $\|x_1, \ldots, x_n\|$ invarian terhadap permutasi;

N3. $\|\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n\| = |\alpha| \, \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|, \ \alpha \in \mathbf{R}$;

N4. $\|x_0 + x_1, x_2, \ldots, x_n\| \leq \|x_0, x_2, \ldots, x_n\| + \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$.

Contoh. Jika $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ merupakan ruang hasilkali dalam, maka H dapat pula dilengkapi dengan n-*hasilkali dalam baku*

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle := \begin{vmatrix} \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

dan n-*norm baku*

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| := \langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle^{1/2}.$$

Perhatikan bahwa

$$\|x_1, \ldots, x_n\|^2 = G(x_1, \ldots, x_n),$$

yang merupakan *determinan Gram* (lihat [FRG] and [MPF]).

Secara geometris, $\|x_1, \ldots, x_n\|$ menyatakan volume paralelpipedium berdimensi n yang direntang oleh $x_1, \ldots, x_n$.

Catatan. Konsep ruang n-norm dikembangkan lebih dahulu oleh Gähler pada tahun 1960-an sebagai generalisasi dari konsep panjang, luas dan volume di ruang vektor real (lihat [Ga1], [Ga2] and [Ga3]).

Konsep ruang n-hasilkali dalam dikembangkan belakangan oleh Diminnie, Gähler dan White [DGW1] dan [DGW2] (untuk $n = 2$) pada tahun 1970-an, serta Misiak [M1] (untuk $n \geq 2$) pada akhir tahun 1980-an.

Seperti halnya ruang hasilkali dalam, ruang n-hasilkali dalam $(H, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ mempunyai sejumlah sifat yang bagus.

Selain ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kita juga mempunyai kesamaan polarisasi:

$$\|x_0 + x_1, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x_0 - x_1, x_2, \dots, x_n\|^2 = 4\langle x_0, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle,$$

dan hukum jajarangenjang:

$$\|x_0 + x_1, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|x_0 - x_1, x_2, \dots, x_n\|^2 =$$

$$2(\|x_0, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^2),$$

yang merupakan ciri sebuah n-norm yang diperoleh dari n-hasilkali dalam.

Kemudian, dari kesamaan polarisasi dan sifat (H2), kita peroleh

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_0, x_1 | x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \rangle$$

untuk tiap permutasi $(i_2, \ldots, i_n)$ dari $(2, \ldots, n)$.

Selanjutnya, jika x_0 atau x_1 merupakan kombinasi linear dari $x_2, \ldots, x_n$, maka

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = 0,$$

dan dalam hal ini kita peroleh

$$\|x_0 + x_1, x_2, \ldots, x_n\|^2 = \|x_0, x_2, \ldots, x_n\|^2 + \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^2.$$

Sebelumnya kita telah mengetahui bahwa pada ruang hasilkali dalam $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, kita dapat mendefinisikan n-hasilkali dalam baku. Sebaliknya, pada ruang n-hasilkali dalam $(H, \langle\cdot,\cdot|\cdot,\ldots,\cdot\rangle)$, kita juga dapat mendefinisikan suatu hasilkali dalam.

Persisnya, ambil sebarang himpunan bebas linear $\{a_1, \ldots, a_n\}$ di H. Lalu, untuk setiap $x, y \in H$, definisikan

$$\langle x, y\rangle := \sum_{\{i_2,\ldots,i_n\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} \langle x, y|a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\rangle.$$

Maka $\langle\cdot,\cdot\rangle$ merupakan hasilkali dalam pada H. Pengamatan lebih lanjut tentang hal ini dapat dilihat di [G2] dan [G3].

Catatan. Walaupun ruang n-hasilkali dalam ternyata merupakan ruang hasilkali dalam, generalisasi dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz, ketaksamaan Bessel, dan kesamaan Parseval di ruang n-hasilkali dalam baku, yang berupa ketaksamaan/kesamaan determinantal, cukup menarik untuk dibahas. Di samping memberikan kemudahan dalam penyajian, konsep n-hasilkali dalam ternyata membuka jalan bagi penemuan baru.

Ketaksamaan dan kesamaan di ruang n-hasilkali dalam baku

Misalkan $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ruang hasilkali dalam yang juga dilengkapi dengan n-hasilkali dalam baku $\langle\cdot,\cdot|\cdot,\ldots,\cdot\rangle$. Maka kita mempunyai teorema berikut tentang ketaksamaan Cauchy-Schwarz di H:

Teorema 1. *Ketaksamaan Cauchy-Schwarz*

$$\langle x_0, x_1|x_2,\ldots,x_n\rangle^2 \le \|x_0,x_2,\ldots,x_n\|^2\|x_1,x_2,\ldots,x_n\|^2$$

ekivalen dengan ketaksamaan determinantal

$$\begin{vmatrix} \langle x_0,x_0\rangle & \langle x_0,x_1\rangle & \ldots & \langle x_0,x_n\rangle \\ \langle x_1,x_0\rangle & \langle x_1,x_1\rangle & \ldots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,x_0\rangle & \langle x_n,x_1\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle \end{vmatrix} \ge 0.$$

Catatan. Kebenaran masing-masing ketaksamaan dalam Teorema 1 merupakan hal yang trivial. Untuk $n = 1$ atau 2, ekivalensi di antara kedua ketaksamaan tersebut mudah dilihat.

Teorema 1 merupakan konsekuensi dari fakta berikut:

Fakta. *Setiap matriks $A_1 = [a_{ij}]$ berukuran $N \times N$ $(N \geq 3)$, dengan determinan submatriks $A_m = [a_{ij}]_{i,j=m,\ldots,N}$ $(m = 3, \ldots, N)$ bernilai tak nol, mestilah memenuhi*

$$|A_1||A_3| = |A_{11}||A_{22}| - |A_{12}||A_{21}|$$

dimana A_{ij} adalah matriks $(N-1) \times (N-1)$ yang diperoleh dari A_1 dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j. (Khususnya, jika A_1 simetris, maka $|A_1||A_3| = |A_{11}||A_{22}| - |A_{12}|^2$.)

Teorema 2. *Jika $\{e_k\}$ merupakan himpunan ortonormal di H, maka untuk setiap $x_1, \ldots, x_n \in H$ berlaku ketaksamaan Bessel:*

$$\sum_k \begin{vmatrix} \langle e_k, x_1 \rangle & \langle e_k, x_2 \rangle & \ldots & \langle e_k, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}^2 \leq$$

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \langle x_2, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Jika, sebagai tambahan, $\{e_k\}$ lengkap, maka kesamaan berlaku.

Catatan. Untuk $n = 1$, ruas kanan disepakati terdiri dari suku pertama saja: ketaksamaan di atas tak lain merupakan ketaksamaan Bessel di ruang hasilkali dalam, sementara kesamaannya dikenal sebagai kesamaan Parseval.

Dengan menggunakan notasi n-hasilkali dalam baku, ketaksamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$\sum_k \langle e_k, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle^2 \le \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^2 \|x_2, \ldots, x_n\|_{n-1}^2,$$

dengan $\|\cdot, \ldots, \cdot\|_{n-1}$ menyatakan $(n-1)$-norm baku pada H.

Seperti halnya Teorema 1, Teorema 2 dapat dibuktikan pula dengan menggunakan fakta tadi. Sketsa buktinya adalah sebagai berikut.

Sketsa Bukti Teorema 2 (untuk $n \geq 2$). Pertama catat jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bergantung linear, maka kedua ruas (1) bernilai 0 dan karenanya tak ada yang harus dibuktikan. Jadi, untuk selanjutnya asumsikan bahwa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bebas linear. Untuk setiap k, tinjau $(n+1) \times (n+1)$ matriks simetris berikut

$$\begin{bmatrix} \langle e_k, e_k \rangle & \langle e_k, x_1 \rangle & \ldots & \langle e_k, x_n \rangle \\ \langle x_1, e_k \rangle & \langle x_1, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, e_k \rangle & \langle x_n, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Maka, dengan menggunakan fakta tentang determinan matriks, kita mempunyai

$$\langle e_k, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle^2 = \|e_k, x_2, \ldots, x_n\|^2 \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^2 -$$

$$\|e_k, x_1, x_2, \ldots, x_n\|_{n+1}^2 \|x_2, \ldots, x_n\|_{n-1}^2.$$

Sekarang bagi kedua ruas dengan $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^2 \|x_2, \ldots, x_n\|_{n-1}^2$ untuk memperoleh

$$\frac{\langle e_k, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle^2}{\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^2 \|x_2, \ldots, x_n\|_{n-1}^2} =$$

$$\frac{\|e_k, x_2, \ldots, x_n\|^2}{\|x_2, \ldots, x_n\|_{n-1}^2} - \frac{\|e_k, x_1, x_2, \ldots, x_n\|_{n+1}^2}{\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^2}.$$

Selanjutnya kita tinggal menunjukkan bahwa, dengan menggerakkan nilai k, jumlah dari suku-suku di ruas kanan lebih kecil daripada 1 (atau, dalam kasus di mana $\{e_k\}$ lengkap, sama dengan 1). Semua ini dapat dilakukan dengan bantuan intuisi geometris dari n-norm baku, proyeksi ortogonal, proses Gram-Schmidt, dan hukum Pythagoras, serta ketaksamaan Bessel (dan kesamaan Parseval) di ruang hasilkali dalam (lihat [G4]).

Rujukan

[DGW1] C. Diminnie, S. Gähler and A. White, "2-inner product spaces", *Demonstratio Math.* **6** (1973), 525-536.

[DGW2] C. Diminnie, S. Gähler and A. White, "2-inner product spaces. II", *Demonstratio Math.* **10** (1977), 169-188.

[Ga1] S. Gähler, "Lineare 2-normietre Räume", *Math. Nachr.* **28** (1965), 1-43.

[Ga2] S. Gähler, "Untersuchungen über verallgemeinerte m-metrische Räume. I", *Math. Nachr.* **40** (1969), 165-189.

[Ga3] S. Gähler, "Untersuchungen über verallgemeinerte m-metrische Räume. II", *Math. Nachr.* **40** (1969), 229-264.

[FRG] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. I, Chelsea Publ. Co., New York (1960), 247–256.

[G1] H. Gunawan, "On n-inner products, n-norms, and the Cauchy-Schwarz inequality", *Sci. Math. Japon.* **55** (2002), 53–60.

[G2] H. Gunawan, "On n-inner product spaces", preprint.

[G3] H. Gunawan, "An inner product that makes a set of vectors orthonormal, *Austral. math. Soc. Gaz.* **28** (2001), 194-197.

[G4] H. Gunawan, "A generalization of Bessel's inequality and Parseval's identity", akan terbit di *Per. Math. Hungar.*

[M1] A. Misiak, "n-inner product spaces", *Math. Nachr.* **140** (1989), 299-319.

[MPF] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić and A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993), 595–603.