

Matematika Pelangi

Oleh:
Hendra Gunawan

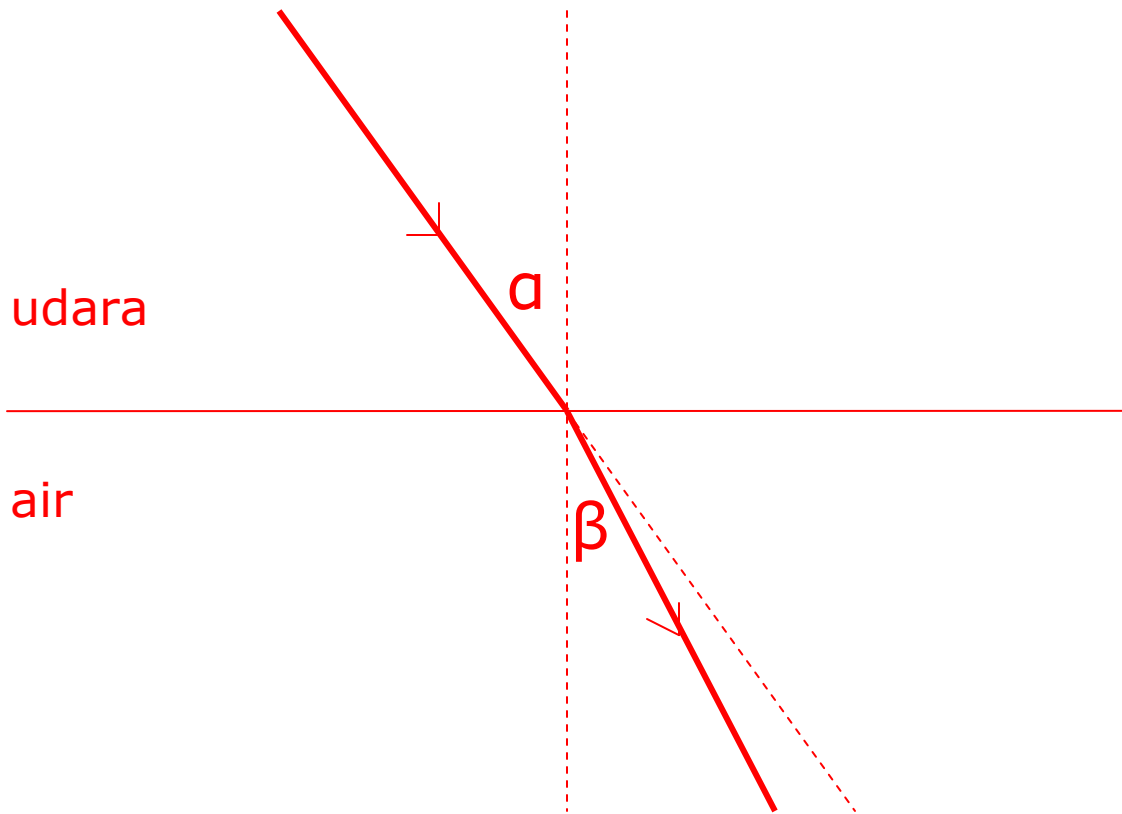
5 Oktober 2004



Pelangi, yang tercipta ketika rintik hujan memecah sinar matahari, telah membuat manusia terpesona sejak jaman dahulu kala. Upaya menjelaskan pelangi secara ilmiah pun telah dilakukan sejak masa **Aristoteles**. [Aristoteles adalah ilmuwan Yunani yang hidup pada 384-322 S.M. Ia dikenal sebagai salah seorang murid **Plato** di sekolah filsafat *Achademya*.]

Dalam tulisan ini akan dipaparkan bagaimana **Rene Descartes** dan **Isaac Newton** menjelaskan bentuk, lokasi, dan warna pelangi. [Rene Descartes adalah ilmuwan Perancis yang hidup pada 1596-1650. Salah satu penemuannya yang terkenal adalah sistem koordinat Cartesius. Isaac Newton adalah ilmuwan Inggris yang hidup pada 1643-1727. Selain terkenal dengan hukum-hukum fisiknya, ia juga dikenal sebagai penemu sistem koordinat polar.]

Masih ingat bahwa sinar akan terbias bila ia menembus medium yang berbeda? Gambar berikut memperlihatkan pembiasan sinar dari udara ke air:

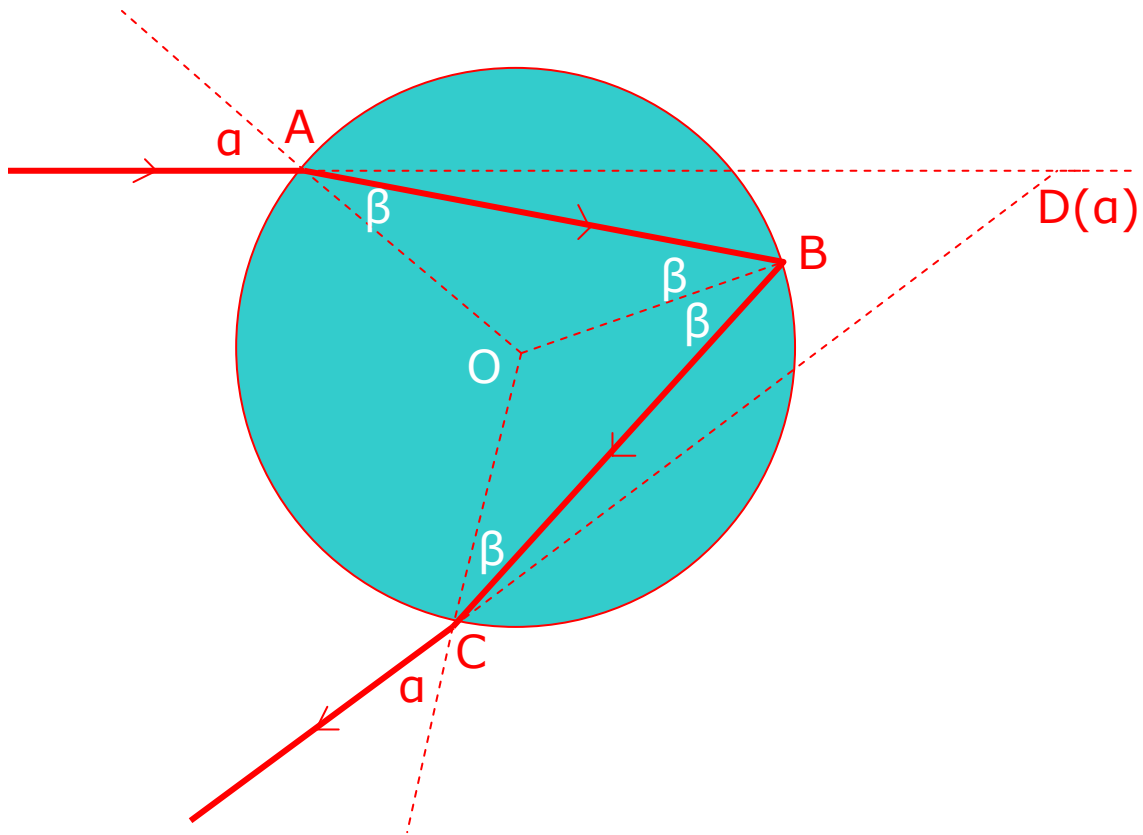


Nah, sekarang bagaimana pelangi terbentuk setelah hujan? Pada gambar di bawah ini diperlihatkan bagaimana seberkas sinar matahari memasuki rintik hujan bulat di A. Sebagian sinar dipantulkan, sebagian lainnya menembus rintik hujan. Garis AB adalah jejak sinar yang menembus rintik hujan tersebut.

Perhatikan bahwa sinar dibiaskan mendekati garis normal AO. Dalam hal ini, Hukum **Snell** mengatakan bahwa

$$\sin \alpha = k \sin \beta$$

dengan α menyatakan sudut masuk dan β sudut bias, dan $k = 4/3$ adalah *indeks bias* air.



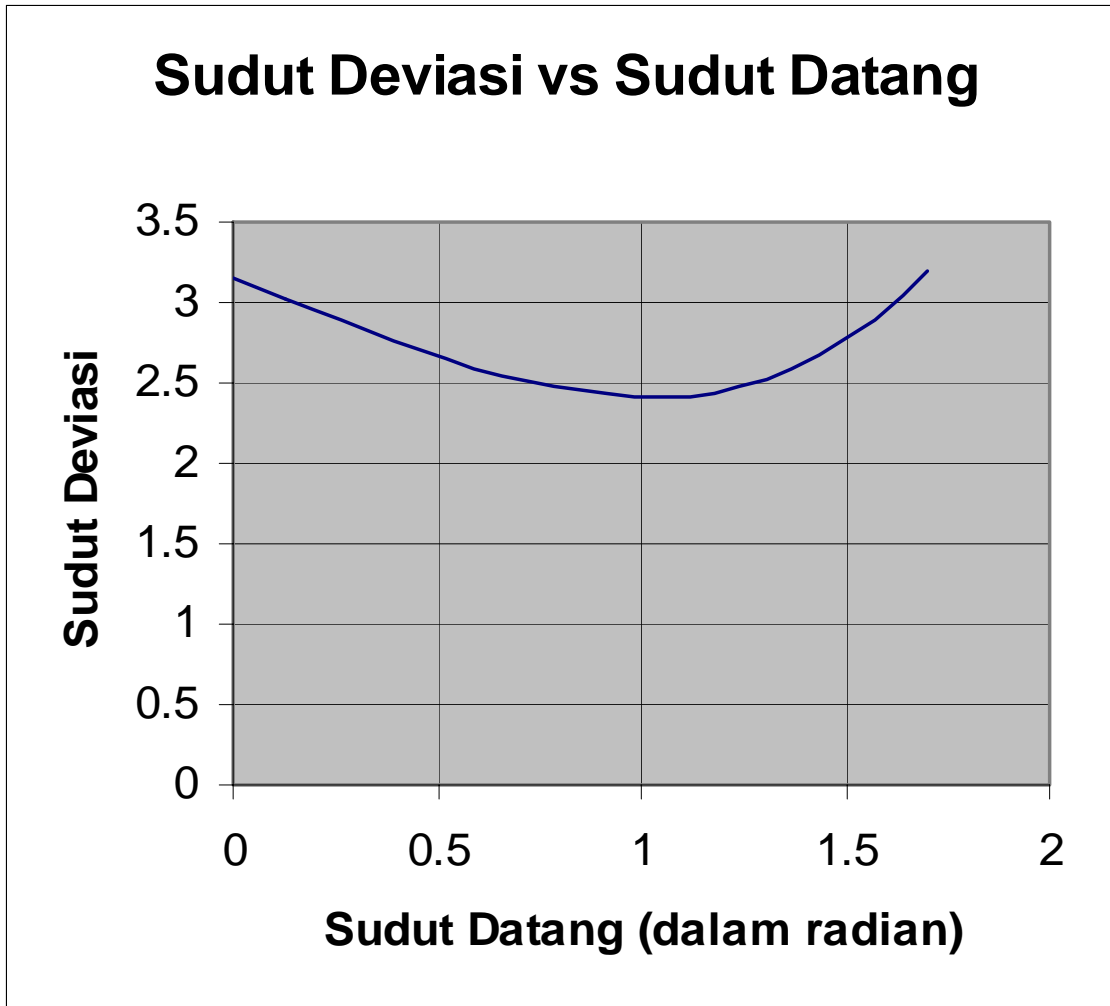
Di B, sebagian sinar meninggalkan rintik hujan dan sebagian dipantulkan. Garis BC adalah bagian yang dipantulkan. Dalam hal ini sudut datang sama dengan sudut pantul. Ketika sinar mencapai C, sebagian dipantulkan, tetapi kali ini kita tertarik pada bagian yang dibiarkan kembali ke udara.

Sudut deviasi $D(\alpha)$ adalah besarnya rotasi searah putaran jarum jam yang telah dijalani sinar selama proses tiga tahap tadi. Jadi,

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) \\ &= \pi + 2\alpha - 4\beta, \end{aligned}$$

dengan $\beta = \arcsin(k^{-1} \sin \alpha)$.

Sekarang kita tertarik untuk mengetahui kapan sudut deviasi ini mencapai nilai minimum. Dengan menggunakan *kalkulus diferensial*, kita dapat menunjukkan bahwa sudut deviasi minimumnya adalah $D(\alpha) \approx 138^\circ$ dan terjadi ketika $\alpha \approx 59,4^\circ$. (Lihat grafik fungsi $D(\alpha)$ terhadap α di bawah ini.)



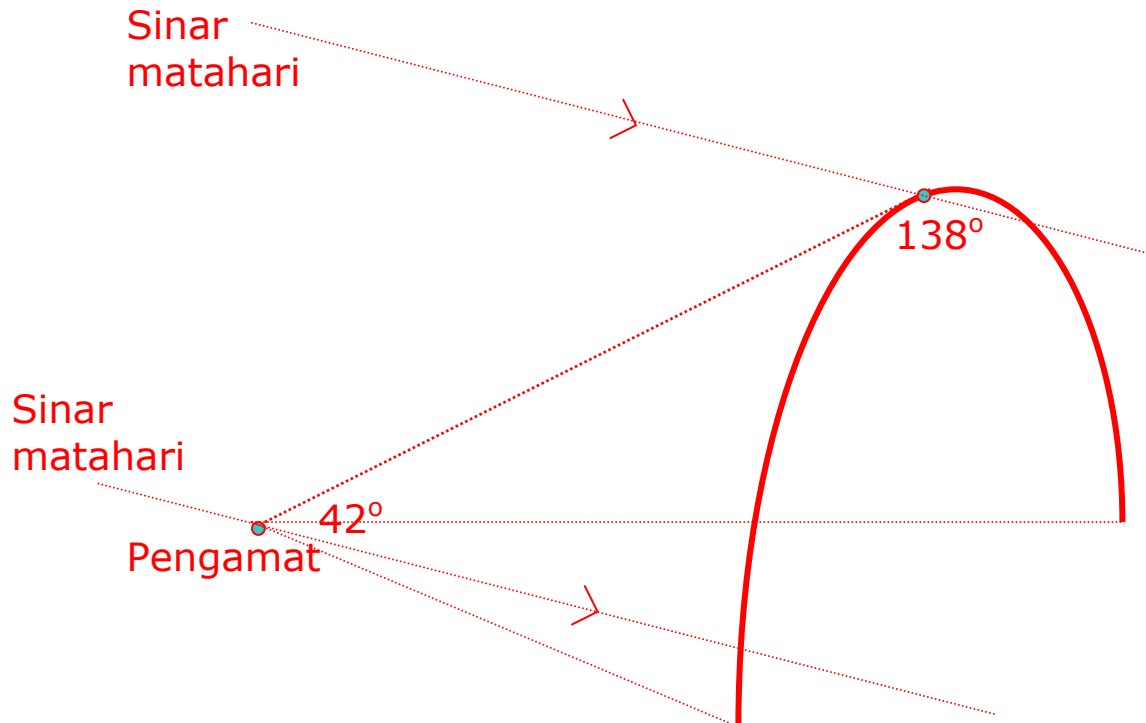
Pentingnya sudut deviasi minimum adalah bahwa ketika $\alpha \approx 59,4^\circ$ kita mempunyai $D'(\alpha) \approx 0$, sehingga $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Ini berarti bahwa sinar dengan sudut datang $\alpha \approx 59,4^\circ$ akan terbias dengan sudut deviasi yang hampir sama.

Konsentrasi sinar yang datang dari dekat arah sudut deviasi minimum inilah yang membuat pelangi terlihat cemerlang.

Gambar berikut memperlihatkan bahwa sudut elevasi dari pengamat ke titik tertinggi pada pelangi adalah sekitar

$$180^\circ - 138^\circ = 42^\circ.$$

Sudut ini disebut *sudut pelangi*.



Setelah memahami lokasi pelangi, bagaimana kita dapat menjelaskan warna pelangi?

Sinar matahari terdiri dari beberapa panjang gelombang, yakni merah, jingga, kuning, hijau, biru, nila, dan ungu. Dalam percobaan dengan prismanya pada tahun 1666, Newton menemukan bahwa indeks bias untuk tiap warna ternyata berbeda. Sebagai contoh, indeks bias untuk sinar merah adalah $k_m \approx 1,3318$; sedangkan indeks bias untuk sinar ungu adalah $k_u \approx 1,3435$.

Dengan mengulangi perhitungan untuk berbagai nilai k ini, sudut pelangi untuk busur merah adalah sekitar $42,3^\circ$, sedangkan untuk busur ungu adalah sekitar $40,6^\circ$. Ini menjelaskan mengapa pelangi terdiri atas tujuh busur warna, dari merah hingga ungu.

[Disadur dan dikembangkan dari buku Calculus karangan J. Stewart (1999)]