MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

30 Oktober 2013

Latihan

1. Fungsi $g(x) = x^3, 0 \le x \le 1$, terintegralkan pada $[0, 1]$. Nyatakan integral tentu g pada $[0, 1]$ sebagai limit jumlah Riemann dengan partisi reguler, dan hitunglah nilainya.

Sasaran Kuliah Hari Ini

4.3.1 Teorema Dasar Kalkulus

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus untuk menghitung integral tentu.

4.3.2 Metode Substitusi

Menggunakan metode substitusi dalam penghitungan integral tentu.

MA1101 MATEMATIKA 1A

4.3.1 TEOREMA DASAR KALKULUS

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus untuk menghitung integral tentu.

Teorema Dasar Kalkulus

Sampai di sini kita hanya dapat mengatakan apakah sebuah fungsi terintegralkan pada suatu selang, dengan melihat apakah fungsi tersebut terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik.

Namun, untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut, selain dengan menggunakan definisinya, memerlukan ‘senjata’ yang lebih ampuh.

Salah satu alat bantu untuk menghitung integral tentu adalah **Teorema Dasar Kalkulus**.

Teorema Dasar Kalkulus I

Jika f kontinu dan mempunyai anti-turunan F pada [a, b], maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Catatan:

1. Teorema ini mengaitkan integral tak tentu dengan integral tentu.
2. Notasi $F(x)\Big|_a^b$ biasa digunakan untuk menyatakan $F(b) - F(a)$.

Bukti Teorema Dasar Kalkulus I

Misalkan *f* kontinu dan mempunyai anti-turunan *F* pada [*a*, *b*]. Maka, *f* terintegralkan pada [*a*, *b*], dan untuk setiap partisi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ kita mempunyai

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i,$$

Karena itu $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i = F(b) - F(a).$

Contoh

1. Fungsi $f(x) = x^2$ kontinu dan mempunyai anti-turunan $F(x) = x^3/3$ pada $[0, 1]$; jadi

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

2. Lebih umum, untuk $r \neq -1$, fungsi $f(x) = x^r$ kontinu dan mempunyai anti-turunan $F(x) = x^{r+1}/(r+1)$ pada $[a, b]$ (dalam daerah asal f); jadi

$$\int_a^b x^r dx = \left.\frac{x^{r+1}}{r+1}\right|_a^b = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}.$$

Kelinearan Integral Tentu

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Contoh: Dengan menggunakan kelinearan integral tentu, kita dapat menghitung

$$3.\int_0^2 (x^2+\sqrt{x})dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 \sqrt{x}dx = \tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Latihan

$$1. \int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)\,dx = \ldots$$

$$2. \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \tfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \ldots$$

MA1101 MATEMATIKA 1A

4.3.2 METODE SUBSTITUSI

Menggunakan metode substitusi dalam penghitungan integral tentu.

Bagaimana menghitung integral ini?

$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + x}.(2x+1)dx.$$

Atau integral ini:

$$\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Dengan menggunakan Aturan Pangkat yang Diper-umum, kita dapat menghitung integral tak tentunya:

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C.$$

Dengan demikian, integral tentu tadi dapat dihitung:

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{2}{3}(20)^{3/2}.$$

Integral semacam ini, baik integral tentu maupun integral tak tentu, dapat pula dihitung dengan **metode substitusi**, yang akan kita bahas selanjutnya.

Sebagai contoh, untuk menghitung integral tak tentu $\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\,dx$, kita gunakan *substitusi peubah* $u = x^2 + x$, sehingga $du = (2x + 1)dx$ dan integral di atas menjadi $\int u^{1/2}\,du$. Dengan Aturan Pangkat, kita peroleh

$$\int u^{1/2}\,du = \tfrac{2}{3} u^{3/2} + C.$$

Substitusikan kembali $u = x^2 + x$, kita dapatkan

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\,dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C,$$

sebagaimana yang kita peroleh sebelumnya dengan Aturan Pangkat yang Diperumum.

Sekarang, untuk menghitung integral tentu

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)dx,$$

kita lakukan substitusi seperti tadi: $u = x^2 + x$, $du = (2x + 1)dx$. Selanjutnya kita perhatikan efek substitusi ini terhadap kedua batas integral. Pada saat $x = 0$, kita peroleh $u = 0$; sementara pada saat $x = 4$, kita dapatkan $u = 20$. Dengan demikian

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)dx = \int_0^{20} u^{1/2}du = \tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^{20} = \tfrac{2}{3}(20)^{3/2},$$

sama seperti yang kita peroleh sebelumnya.

Catatan

Dalam menghitung integral tentu dengan metode substitusi, kedua batas integral pada umumnya berubah; dan kita dapat menghitung integral dalam peubah baru *tanpa harus mensubstitusikan kembali peubah lama*.

Bila agak rumit, integral tentu tsb dapat dihitung dalam dua tahap: pertama cari dahulu integral tak tentunya, setelah itu baru gunakan Teorema Dasar Kalkulus.

Secara umum, dengan melakukan substitusi peubah u = *g*(x), du = *g*'(x)dx, kita peroleh

Integral tak tentu: $\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)\, du.$

Integral tentu: $\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$

Jika *F* adalah anti-turunan dari *f*, maka

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Latihan. Hitung integral tentu/tak tentu berikut:

1. $\int \sqrt{3x + 2}\, dx.$
2. $\int \cos(3x + 2)\, dx.$
3. $\int_0^1 (3x+2)^3\, dx.$
4. $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$
5. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(\sqrt{t}+1)^3}\, dt.$