# MA1101 MATEMATIKA 1A

**Hendra Gunawan**

Semester I, 2013/2014

1 November 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu). Hitung integral tentu/tak tentu berikut:

1. $\int \sqrt{3x + 2}\, dx$.
2. $\int \cos(3x + 2)\, dx$.
3. $\int_0^1 (3x+2)^3\, dx$.
4. $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.
5. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(\sqrt{t}+1)^3}\, dt$.

# Sasaran Kuliah Hari Ini

**4.4.1 Teorema Dasar Kalkulus II**

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus II untuk menentukan turunan dari integral.

**4.4.2 Sifat-Sifat Integral Tentu**

Menggunakan sifat-sifat integral tentu dalam menghitung atau menaksir nilai integral tentu.

**4.5. Teorema Nilai Rata-rata Integral**

Menentukan nilai rata-rata integral dari suatu fungsi yang diberikan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

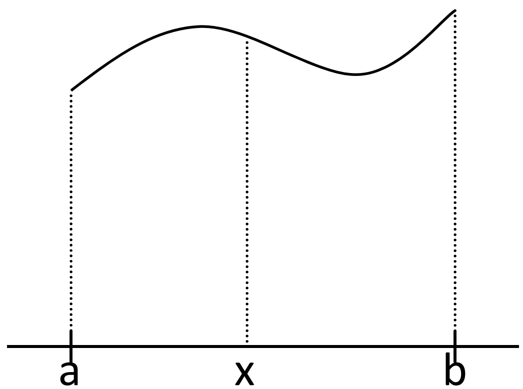
# 4.4.1 TEOREMA DASAR KALKULUS II

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus II untuk menentukan turunan dari integral.

# Fungsi Akumulasi

Misalkan *f* kontinu pada [*a*, *b*].
Definisikan

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$




Di sini, G(x) menyatakan luas daerah di bawah kurva y = *f*(t), *a* ≤ t ≤ x (lihat gambar).

Perhatikan bahwa G(*a*) = 0 dan $G(b) = \int_a^b f(t)dt.$

Fungsi G disebut **fungsi akumulasi** dari *f*.

# Teorema Dasar Kalkulus II

$G'(x) = f(x)$ *pada* $[a, b]$; *yakni,*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \forall x \in [a,b].$$

**Catatan:**

1. TDK II menyatakan bahwa fungsi akumulasi G merupakan anti-turunan dari *f*.
2. TDK I dan TDK II menyatakan bahwa turunan dan integral merupakan *semacam* kebalikan satu terhadap yang lainnya.

# Bukti Teorema Dasar Kalkulus II

Menurut definisi turunan,

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Ketika *h* kecil, *f* tak berubah banyak pada [x, x+h]. Pada selang ini, *f*(t) ≈ *f*(x), sehingga integral-nya kira-kira sama dengan *h*.*f*(x). Jadi *G'*(x) = *f*(x).

# Contoh

1. $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t^3 dt\right) = x^3.$$

2. $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 t^3 dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x t^3 dt\right) = -x^3.$$

3. $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3 dt\right) \overset{u=2x}{=} \frac{d}{du}\left(\int_1^u t^3 dt\right)\frac{du}{dx} = u^3.2 = 16x^3.$$

4. $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} t^3 dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_x^1 t^3 dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3 dt\right)$$
$$= -x^3 + 16x^3 = 15x^3.$$

# Latihan

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^x (2t^2+\sqrt{t})dt\right) = \ldots$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^x xt.dt\right) = \ldots$

3. Diketahui $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,ds$ .

   Tentukan selang di mana grafik y = f(x)

   (a) naik, (b) cekung ke atas.

MA1101 MATEMATIKA 1A

# 4.4.2 SIFAT-SIFAT INTEGRAL TENTU

Menggunakan sifat-sifat integral tentu dalam menghitung atau menaksir integral tentu.

# Sifat-Sifat Integral Tentu

Selain sifat kelinearan (yang telah dibahas pada pertemuan sebelumnya), integral tentu juga memiliki beberapa sifat penting, yaitu:

-Sifat Penjumlahan Selang

-Sifat Perbandingan

-Sifat Keterbatasan

# Sifat Penjumlahan Selang

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

**Contoh**:

$$\int_{-1}^{2} x\,|\,x\,|\,dx = \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3}.$$

# Sifat Perbandingan

*Jika* $f(x) \le g(x)$ *pada* $[a, b]$, *maka*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

**Contoh**: $\sin^4 x \le x^4$ pada selang $[0, 1]$; jadi

$$\int_0^1 \sin^4 x.dx \le \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

# Sifat Keterbatasan

*Jika* m ≤ *f*(x) ≤ M *pada selang* [a, b], *maka*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

**Contoh:** $1 \le \sqrt{1+x^4} \le \sqrt{2}$ pada selang [0,1]; jadi

$$1 = 1(1-0) \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \le \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2}.$$

# Integral Tentu dari Fungsi Simetris dan Fungsi Periodik

Jika *f* genap, maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

Jika *f* ganjil, maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Jika *f* **periodik** dengan periode *p*, maka

$$\int_{a}^{a+p} f(x)dx = \int_{0}^{p} f(x)dx.$$

Latihan. Hitung/taksir nilai integral tentu berikut:

1. $\int_0^2 |x^3 - 1|\, dx.$

2. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^4}\, dx.$

3. $\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}.dx.$

4. $\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^4}\, dx.$

MA1101 MATEMATIKA 1A

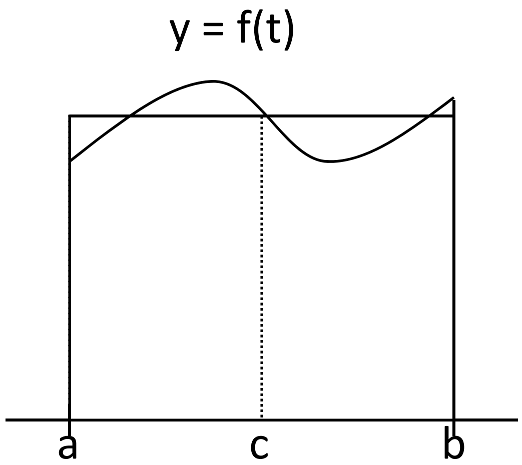
# 4.5 TEOREMA NILAI RATA-RATA INTEGRAL

Menentukan nilai rata-rata integral dari suatu fungsi yang diberikan.

# Teorema Nilai Rata-Rata Integral

*Jika f kontinu pada* [a, b], *maka ter-dapat* c ϵ [a,b] *sedemikian sehingga*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$




<u>Catatan</u>. Nilai *f*(c) dalam teorema ini disebut **nilai rata-rata integral** *f* pada [a, b] (lihat gambar). Per-hatikan bahwa luas daerah di ba-wah kurva y = *f*(t), t ϵ [a, b], sama dengan *f*(c)(b – a).

# Contoh

Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Maka

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Jadi nilai rata-rata integral $f$ pada $[0, 1]$ adalah ⅓.

Nilai rata-rata tersebut tercapai di $x = 1/\sqrt{3}$.

# Latihan

1. Tentukan nilai rata-rata integral $f(x) = 4x^3$ pada $[1, 3]$.
2. Di titik manakah $g(x) = \pi \sin x$ mencapai nilai rata-rata integralnya pada selang $[0, \pi]$?