MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

8 November 2013

Apa yang Telah Dipelajari pada Bab 4

1. Notasi Sigma dan Luas Daerah di Bawah Kurva
2. Jumlah Riemann dan Integral Tentu
3. Teorema Dasar Kalkulus I dan Metode Substitusi
4. Teorema Dasar Kalulus II dan Sifat-sifat Integral Tentu
5. Teorema Nilai Rata-rata Integral
6. Pengintegralan Numerik

MA1101 MATEMATIKA 1A

BAB 5. PENGGUNAAN INTEGRAL

Sasaran Kuliah Hari Ini

5.1 Luas Daerah

Menghitung luas daerah (pada bidang) yang dibatasi oleh beberapa kurva.

5.2 Volume Benda Putar dan Benda dengan Penampang Tertentu

Menghitung volume benda putar (dengan metode cakram/cincin) dan benda dengan penampang tertentu (dengan metode irisan sejajar).

MA1101 MATEMATIKA 1A

5.1 LUAS DAERAH

Menghitung luas daerah (pada bidang) yang dibatasi oleh beberapa kurva.

Luas Daerah

Bila f(x) kontinu dan bernilai tak negatif, maka

$\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas daerah pada bidang-xy

yang terletak *di bawah* kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$,

dan *di atas* sumbu-x.

Bila f(x) bernilai tak positif, maka luas daerah

yang terletak *di atas* kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, dan

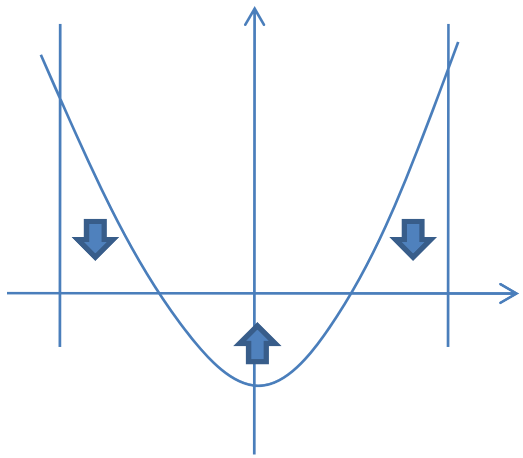
di bawah sumbu-x sama dengan $-\int_a^b f(x)dx$

Luas Daerah

Secara umum, luas daerah yang *dibatasi* oleh kurva $y = f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$, dan sumbu-x adalah

$$\int_a^b | f(x) | \, dx.$$

Contoh: Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 1$, garis $x = -2$, garis $x = 2$, dan sumbu-x. [Petunjuk: Gambar terlebih dahulu daerah yang dimaksud.]



Jawab: Luas daerah yang dimaksud adalah

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx.$$

Karena f(x) = |x² – 1| genap, maka luas daerah tsb sama dengan

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\,dx = 2\left[\int_{0}^{1} (1 - x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx\right]$$

$$= 2\left[\left. x - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^3}{3} - x\right|_1^2\right] = 2\left[\frac{2}{3} - 0 + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= 4.$$

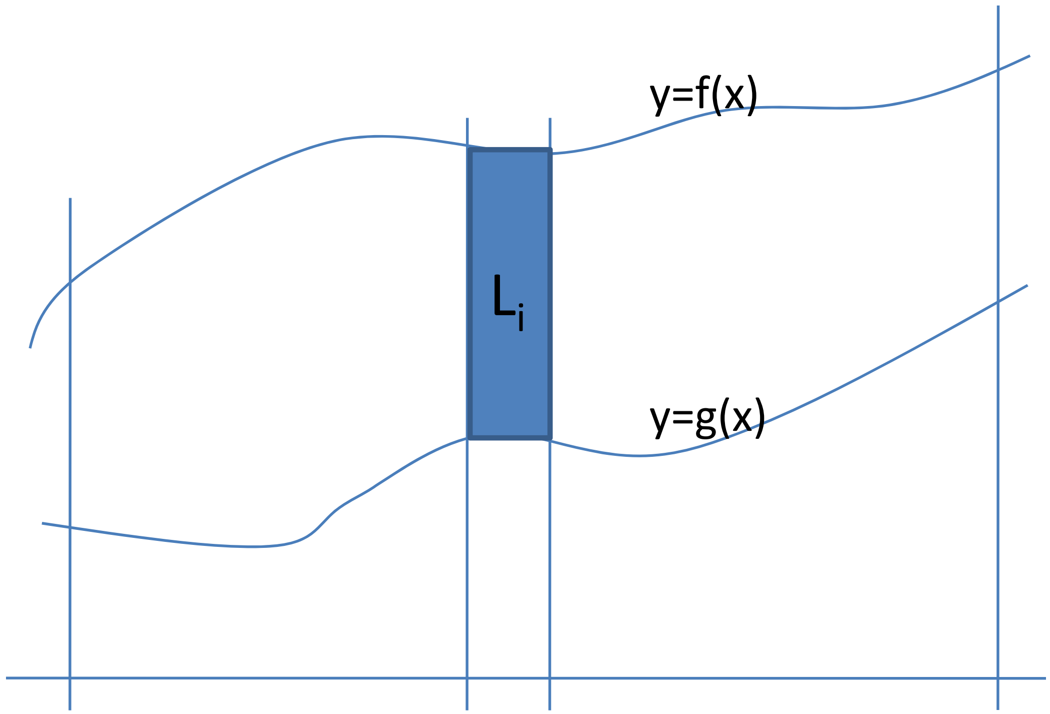
Luas Daerah di Antara Dua Kurva

Misalkan $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$ dan kita ingin menentukan luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$, serta garis $x = a$ dan garis $x = b$. Luas irisan ke-i dapat ditaksir sbb:

$$\Delta L_i \approx [f(x_i) - g(x_i)].\Delta x_i.$$

Bila kita jumlahkan dan ambil limitnya, maka luas daerah yang dimaksud dapat dinyatakan sebagai

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



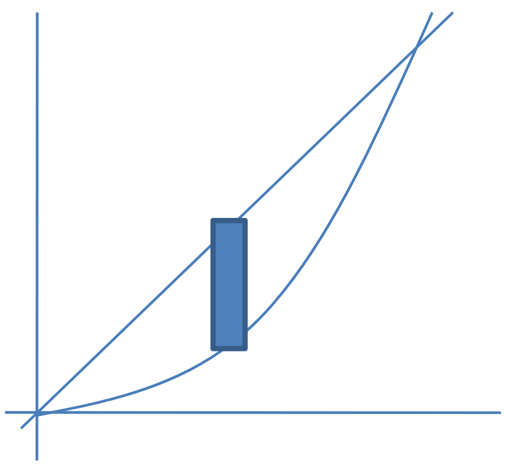
$$\Delta L_i \approx [f(x_i) - g(x_i)].\Delta x_i$$

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Contoh

Tentukan luas daerah *tertutup* yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$.

<u>Jawab</u>: Luas irisan sama dengan $\Delta L_i \approx [x_i - x_i^2].\Delta x_i$; jadi luas daerah tsb sama dengan



$$L = \int_0^1 [x - x^2]dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Latihan

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva:

1. $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 4$, dan $x = 0$.
3. $x = y^2 - 2y$ dan $x - y = 4$. [*Petunjuk*: Iris daerahnya secara horisontal!]

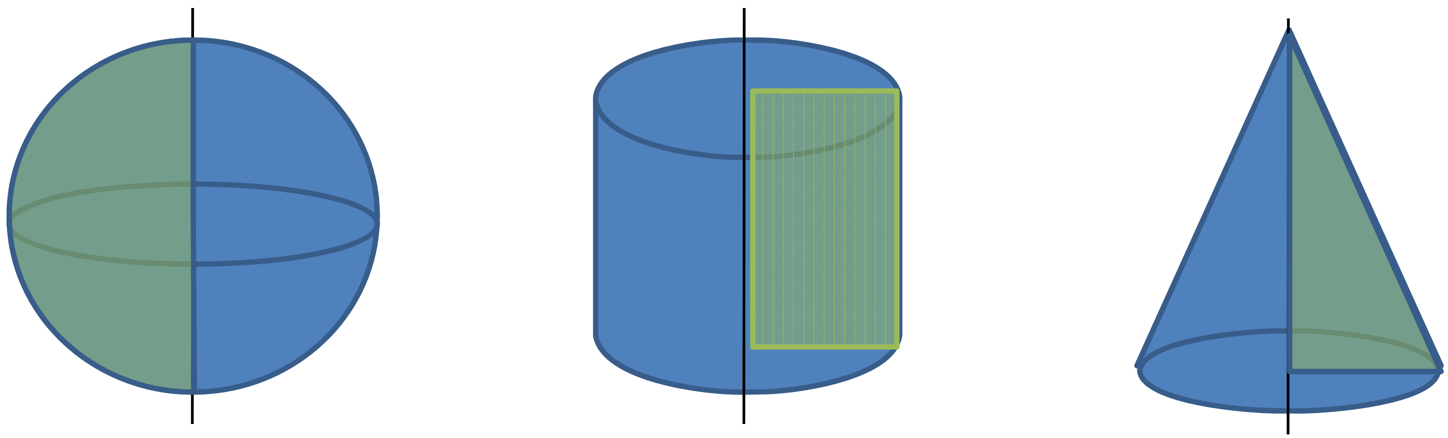
MA1101 MATEMATIKA 1A

5.2 VOLUME BENDA PUTAR DAN BENDA DENGAN PENAMPANG TERTENTU

Menghitung volume benda putar (dengan metode cakram/cincin) dan benda dengan penampang tertentu (dengan metode irisan sejajar).

Benda Putar

Benda pejal seperti bola, tabung lingkaran, dan kerucut merupakan contoh benda putar, yang dapat diperoleh dengan memutar daerah setengah lingkaran, persegipanjang, dan segitiga terhadap sumbu putar yang berimpit dengan salah satu sisi daerah tsb.

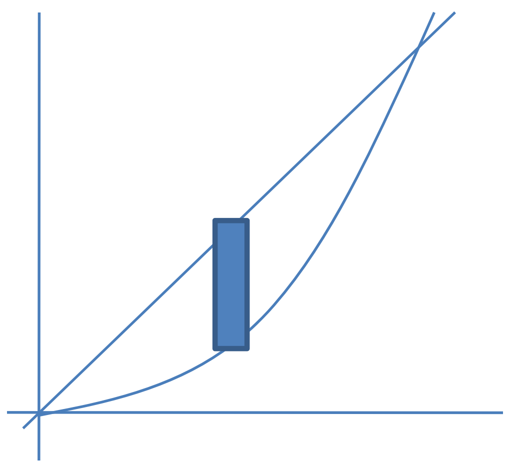


Menghitung Volume Benda Putar: Metode Cakram/Cincin

Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu-x, dan kita ingin menghitung volume benda putar yang terbentuk. Kita iris dan taksir volume cincin yang terbentuk, yaitu $\Delta V_i \approx \pi[x_i^2 - x_i^4].\Delta x_i$. Jadi, volume benda putar yang terbentuk adalah

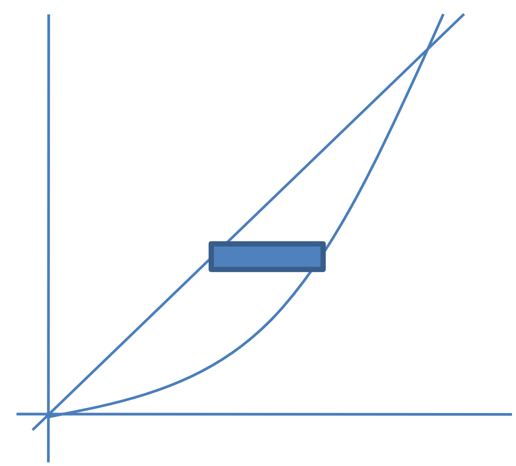
$$V = \pi\int_0^1 [x^2 - x^4]dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \frac{2}{15}\pi.$$



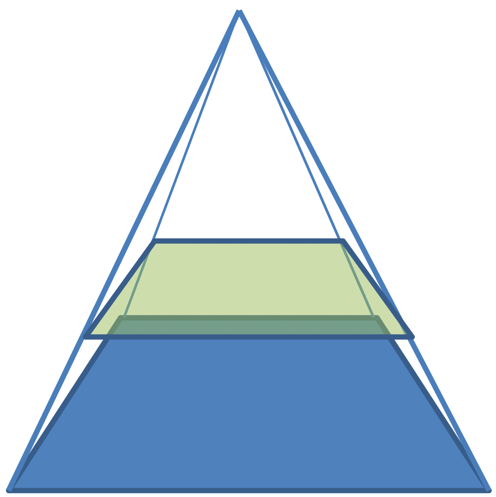
Menghitung Volume Benda Putar: Metode Cakram/Cincin

Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu-y. Irislah secara mendatar, taksir volumenya, dan integralkan!



Benda dengan Penampang Tertentu

Piramida bukan benda putar, tetapi ia mempunyai penampang mendatar yang sama, berbentuk persegi. Volumenya dapat dihitung dengan mengiris piramida tsb secara mendatar, menaksir volume tiap irisannya, lalu mengintegralkannya.

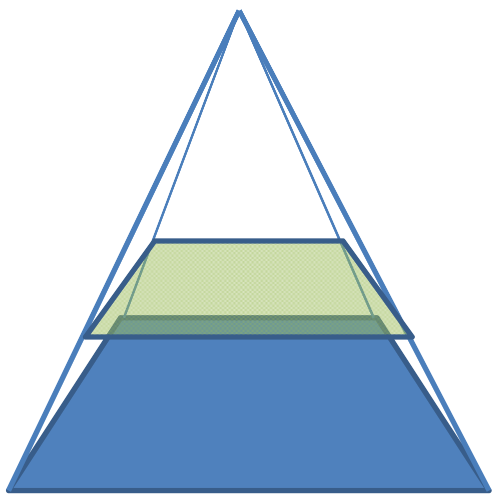


Metode Irisan Sejajar

Bila panjang sisi alas = S dan tinggi piramida = T, maka volume irisan mendatar pada ketinggian t sama dengan

$\Delta V \approx (St/T)^2.\Delta t$; jadi volume piramida tsb sama dengan

$$V = \frac{S^2}{T^2}\int_0^T t^2 dx = \frac{S^2 T}{3}.$$



Contoh Lainnya

Alas sebuah benda berbentuk setengah lingkaran berjari-jari 1. Misalkan penampang benda tsb yang tegak lurus terhadap sisi setengah lingkaran yang merupakan diameter, berbentuk persegi. Tentukan volume benda tsb.

Latihan

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$ diputar mengelilingi:

   a. sumbu-x b. sumbu-y c. garis $y = 1$.

2. Alas sebuah benda berbentuk lingkaran berjari-jari 1. Misalkan penampang benda tsb yang tegak lurus terhadap suatu diameter, berbentuk persegi. Tentukan volume benda tsb.