

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

13 November 2013

Latihan

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$ diputar mengelilingi:
 - a. sumbu- x
 - b. sumbu- y
 - c. garis $y = 1$.
2. Alas sebuah benda berbentuk lingkaran berjari-jari 1 . Misalkan penampang benda tsb yang tegak lurus terhadap suatu diameter, berbentuk persegi. Tentukan volume benda tsb.

Sasaran Kuliah Hari Ini

5.3 Volume Benda Putar: Metode Kulit Tabung

Menghitung volume benda putar dengan metode kulit tabung.

5.4 Kerja dan Gaya Fluida

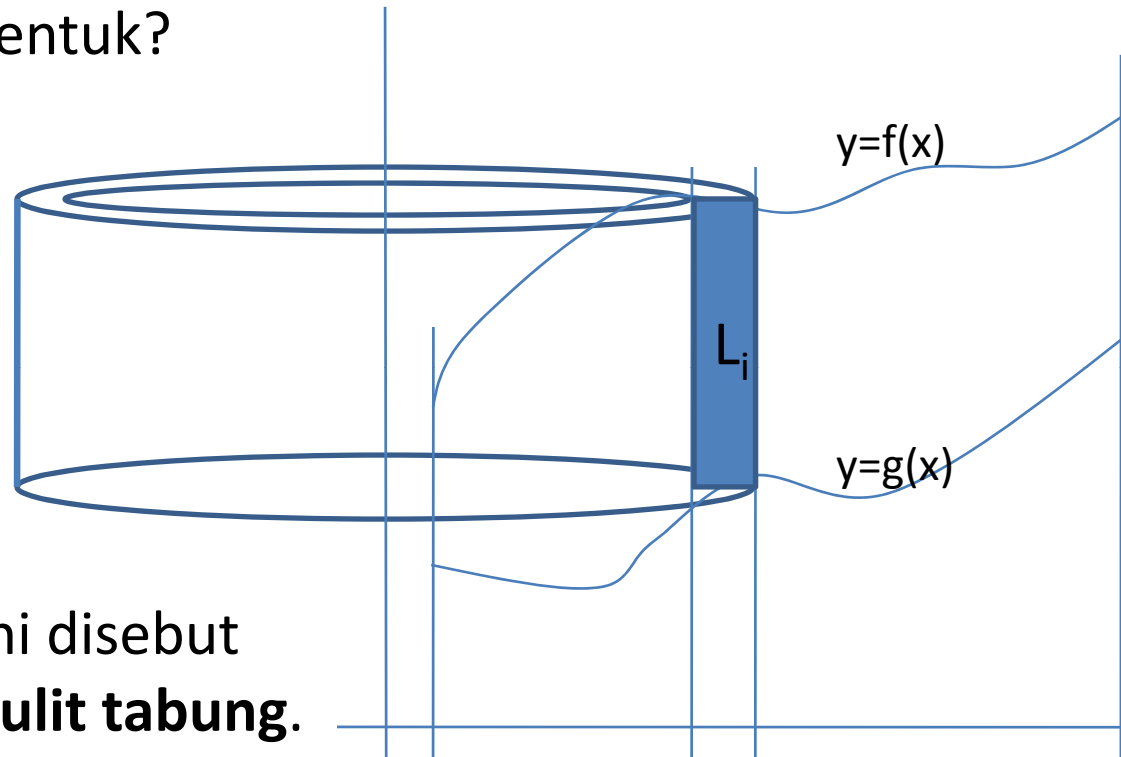
Menghitung kerja yang dilakukan oleh suatu gaya (sebagai suatu integral tentu).

MA1101 MATEMATIKA 1A

5.3 VOLUME BENDA PUTAR: METODE KULIT TABUNG

Menghitung volume benda putar dengan metode kulit tabung.

Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ diputar mengelilingi sumbu- y . Berapakah volume benda putar yang terbentuk?



Metode ini disebut **metode kulit tabung**.

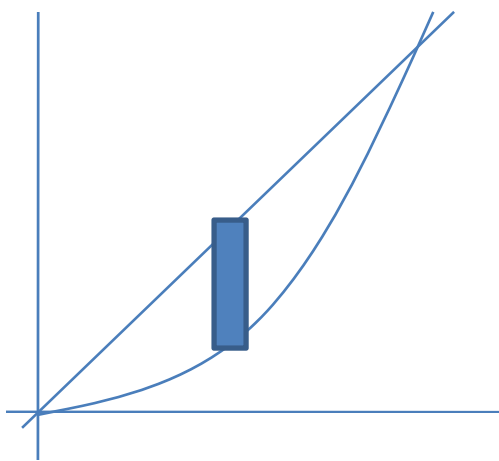
$$\Delta V_i \approx 2\pi x [f(x_i) - g(x_i)] \cdot \Delta x_i$$

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

Contoh

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah *tertutup* yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu- y .

Jawab: Volume irisan sama dengan $\Delta V_i \approx 2\pi x_i \cdot [x_i - x_i^2] \cdot \Delta x_i$; jadi volume benda putar yang terbentuk sama dengan

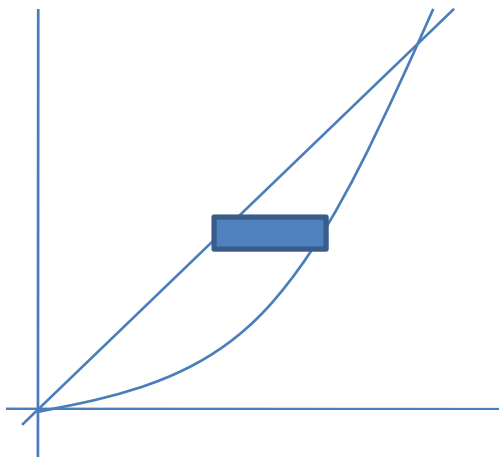


$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 [x^2 - x^3] dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Contoh

2. Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah *tertutup* yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu- x .

Jawab: Volume irisan sama dengan $\Delta V_i \approx 2\pi y_i \cdot [y_i - y_i^2] \cdot \Delta y_i$; jadi volume benda putar yang terbentuk sama dengan



$$V = 2\pi \int_0^1 [y\sqrt{y} - y^2] dy = \dots$$

Latihan

Tentukan volume benda yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut diputar mengelilingi sumbu- y :

1. $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, dan $x = 0$.

Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva

3. $x = y^2 - 2y$ dan $x - y = 4$
diputar mengelilingi sumbu- x .

MA1101 MATEMATIKA 1A

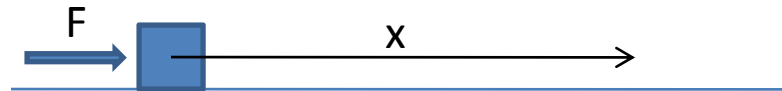
5.4 KERJA DAN GAYA FLUIDA

Menghitung kerja yang dilakukan oleh suatu gaya (sebagai suatu integral tentu).

Kerja yang Dilakukan oleh Suatu Gaya

Jika sebuah benda berpindah sejauh x akibat terkena gaya konstan sebesar F (yang searah dengan gerakan benda tsb), maka **kerja yang dilakukan oleh gaya tsb** adalah

$$W = F \cdot x$$



dengan W = kerja, F = gaya, dan x = perpindahan.

Kerja yang Dilakukan oleh Suatu Gaya

Dalam banyak kasus, $F = F(x)$ tidak konstan. Untuk menghitung kerja yang dilakukannya, kita gunakan proses pengintegralan: iris, taksir, jumlahkan dan ambil limitnya.

Pada selang bagian ke- i : $\Delta W_i \approx F(x_i) \cdot \Delta x_i$.

Jadi, kerja yang dilakukan untuk memindahkan benda dari posisi $x = a$ ke $x = b$ sama dengan

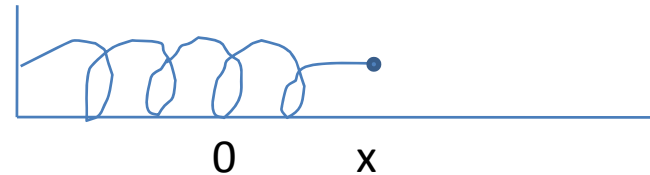
$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

Kerja pada Pegas

Menurut Hukum Hooke, gaya $F(x)$ yang diperlukan untuk menahan pegas pada posisi x satuan panjang dari posisi alaminya sebanding dengan x , yakni

$$F(x) = kx,$$

dengan k = konstanta pegas tsb.



Contoh

Panjang alami suatu pegas adalah 0.2 m . Jika diperlukan gaya 12 N untuk menarik dan menahannya sejauh 0.04 m , hitunglah kerja yang dilakukan untuk menarik pegas tsb sejauh 0.1 m dari panjang alaminya.

Jawab: Dari persamaan $12 = k(0.04)$, kita peroleh konstanta pegas $k = 300$.

Kerja yang dilakukan untuk menarik pegas tsb sejauh 0.1 m dari panjang alaminya adalah

$$W = \int_0^{0.1} 300x dx = 150x^2 \Big|_0^{0.1} = 1.5 \text{ joule.}$$

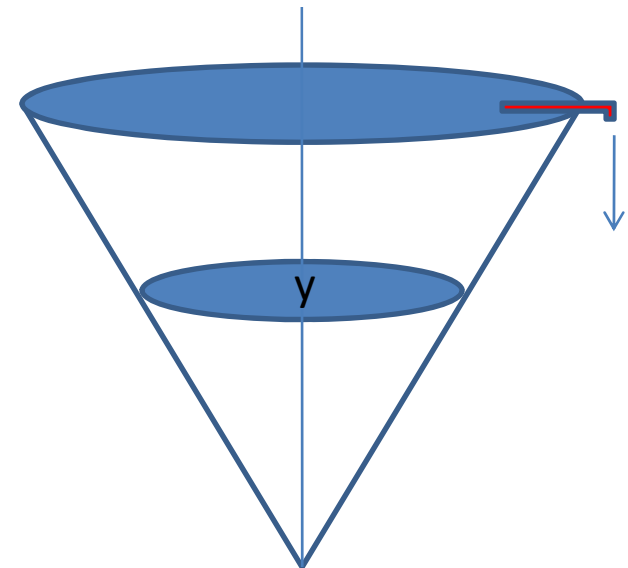
Kerja untuk Memindahkan Fluida

Diketahui sebuah tangki berbentuk kerucut terbalik, dengan alas 10 dm dan tinggi 10 dm, penuh berisi air. Tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air keluar dari tangki, melalui tepi atas tangki.

Jawab: $\Delta V \approx \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 \Delta y$

$$\Delta F \approx \delta \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 \Delta y$$

$$\Delta W \approx \delta \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 (10 - y) \Delta y$$



Jadi, kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air keluar dari tangki, melalui tepi atas tangki adalah

$$\begin{aligned} W &= \frac{\delta\pi}{4} \int_0^{10} y^2 (10 - y) dy \\ &= \frac{\delta\pi}{4} \left[10 \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^{10} \\ &= \frac{\delta\pi}{4} \frac{10^4}{12} = \frac{625 \delta\pi}{3} \text{ Joule.} \end{aligned}$$

Latihan

1. Panjang alami suatu pegas adalah 0.08 m. Gaya sebesar 0.6 N diperlukan untuk menekan dan menahannya pada panjang 0.07 m. Tentukan kerja yang dilakukan untuk menekan dan menahan pegas tsb pada panjang 0.06 m.
2. Tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air keluar dari tangki dengan penampang spt pada gambar di samping. Panjang tangki tsb = 10 dm ke belakang.

