MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

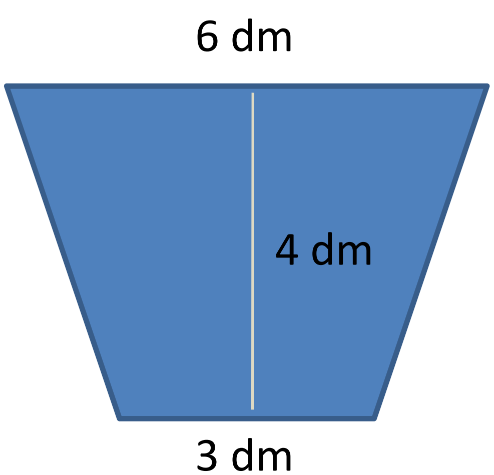
Semester I, 2013/2014

15 November 2013

Latihan

1. Panjang alami suatu pegas adalah 0.08 m. Gaya sebesar 0.6 N diperlukan untuk menekan dan menahannya pada panjang 0.07 m. Tentukan kerja yang dilakukan untuk menekan dan menahan pegas tsb pada panjang 0.06 m.

2. Tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air keluar dari tangki dengan penampang spt pada gambar di samping. Panjang tangki tsb = 10 dm ke belakang.



Sasaran Kuliah Hari Ini

5.5 Momen dan Pusat Massa

- Menghitung momen dan menentukan pusat massa dari suatu distribusi massa pada garis dan bidang.

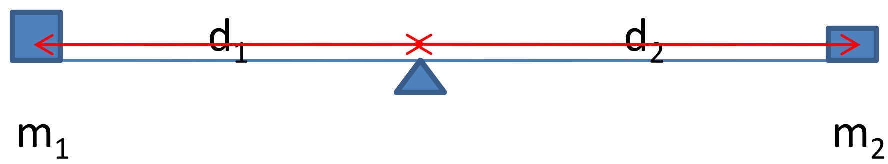
- Menggunakan Teorema Pappus untuk meng-hitung volume benda putar (yang diperoleh dengan memutar suatu daerah yang diketahui pusat massanya terhadap suatu sumbu putar).

MA1101 MATEMATIKA 1A

5.5 MOMEN DAN PUSAT MASSA

- Menghitung momen dan menentukan pusat massa pada garis dan bidang.
- Menggunakan Teorema Pappus untuk menghitung volume benda putar.

Distribusi Massa Diskrit pada Garis



Jungkit di atas seimbang bila $d_1m_1 = d_2m_2$ ... (*).

Bila kita letakkan jungkit tsb pada garis bilangan real sehingga titik tumpunya berimpit dengan 0, maka persamaan (*) menjadi:

$$x_1m_1 + x_2m_2 = 0 \qquad \text{... (\#).}$$

Hasil kali massa dari suatu partikel dan jaraknya (berarah) dari suatu titik acuan disebut **momen** partikel terhadap titik acuan tsb.

Persamaan (#) menyatakan bahwa **momen total** terhadap titik tumpunya sama dengan 0.

Momen

Situasi tadi dapat diperumum sbb. Sistem massa $m_1, \ldots, m_n$ yang tersebar di posisi $x_1, \ldots, x_n$ pada garis bilangan real mempunyai momen (total)

$$M = \sum_i x_i m_i.$$

Sistem tsb akan seimbang di titik tumpunya (yang berimpit dengan 0) bila $M = 0$.

Secara umum, suatu sistem massa akan seimbang di suatu titik, tidak harus di 0. Tetapi bagaimana mencari titik keseimbangan tsb?

Pusat Massa

Misalkan titik **pusat massa**-nya adalah x*. Maka, momen total terhadap x* haruslah sama dengan 0, yakni:

$$\sum_i (x_i - x^*)m_i = 0.$$

Dari sini kita dapatkan bahwa:

$$\sum_i x_i m_i = x^* \sum_i m_i,$$

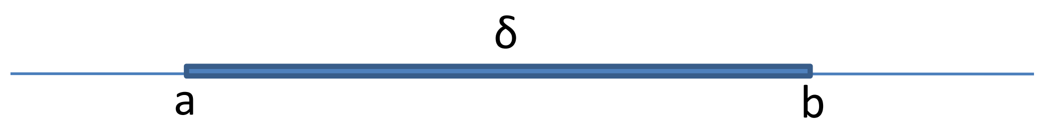
sehingga mestilah

$$x^* = \sum_i x_i m_i / \sum_i m_i = M/m,$$

dengan M = momen total terhadap 0 dan m = **massa total**.

Distribusi Massa Kontinu pada Garis

Sekarang misalkan kita mempunyai seutas kawat lurus yang menempati selang [a, b] pada garis bilangan real.

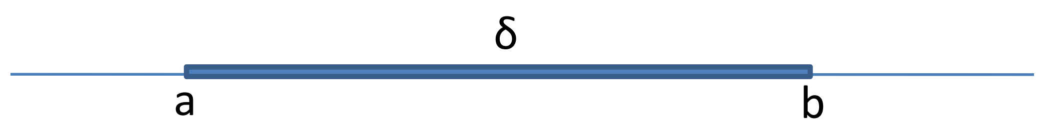


Bila rapat massanya (δ) konstan, maka massa kawat tsb mudah dihitung – kita hanya perlu mengalikan rapat massa kawat tsb dengan panjangnya: $m = \delta(b - a)$.

Bagaimana bila rapat massanya tidak konstan?

Distribusi Massa Kontinu pada Garis

Bila rapat massanya tidak konstan, $\delta = \delta(x)$, maka kita perlu mengintegralkannya:



Massa irisan: $\Delta m \approx \delta(x)\Delta x$.

Momen irisan (thd 0): $\Delta M \approx x\,\delta(x)\Delta x$.

Jadi, massa kawat: $m = \int_a^b \delta(x)\,dx.$

dan momen (thd 0): $M = \int_a^b x\delta(x)\,dx.$

Pusat Massa

Jadi, pusat massa kawat tsb terletak di

$$x^* = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}.$$

Contoh

Diketahui kawat sepanjang 25 cm mempunyai rapat massa $\delta(x) = \sqrt{x}$ (gr/cm), dengan x = jarak dari titik ujung kiri kawat tsb. Tentukan massa dan pusat massa kawat tsb.

Jawab: Misal titik ujung kiri = 0 . Massa kawat tsb adalah

$$m = \int_0^{25} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x}\,\Big|_0^{25} = \frac{250}{3}\,gr.$$

Momen kawat tsb terhadap 0 adalah

$$M = \int_0^{25} x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5} x^2\sqrt{x}\,\Big|_0^{25} = 1250\,gr.cm.$$

Contoh (berlanjut)

Jadi pusat massanya ada di

$$x^* = \frac{M}{m} = \frac{1250}{250/3} = 15cm$$

dari titik ujung kiri kawat tsb.

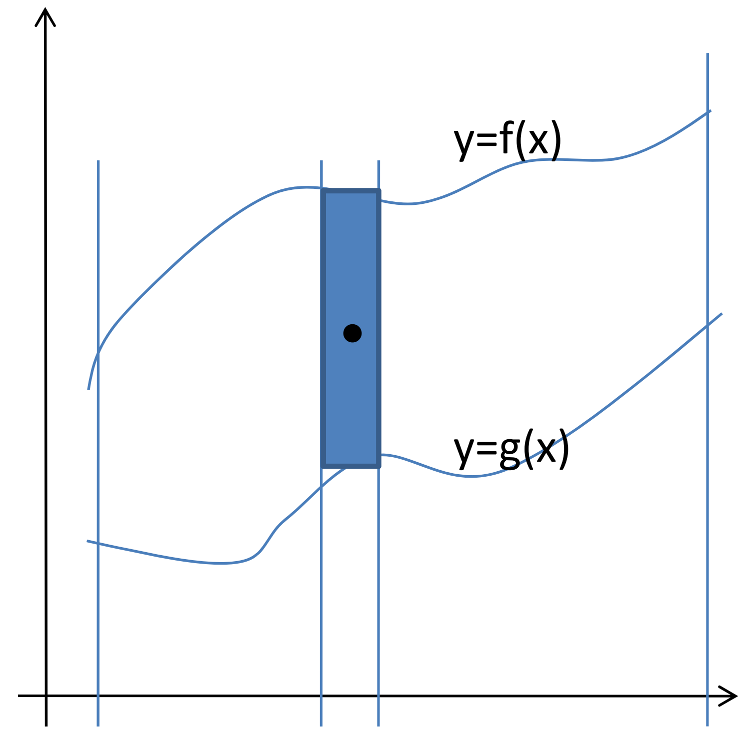
Latihan

Diketahui kawat sepanjang 10 cm mempunyai rapat massa $\delta(x) = x$ (gr/cm), dengan x = jarak dari titik ujung kiri kawat tsb. Tentukan massa dan pusat massa kawat tsb.

MOMEN DAN PUSAT MASSA LAMINA PADA BIDANG & TEOREMA PAPPUS

Distribusi Massa (Kontinu) pada Bidang

Misal kita mempunyai sebuah **lamina** (keping datar) dengan rapat massa δ konstan, yang menempati daerah pada bidang yang dibatasi oleh garis $x = a$ dan $x = b$ serta kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$.



$\Delta m \approx \delta[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_y \approx \delta x[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_x \approx \frac{1}{2}\delta[f(x)^2 - g(x)^2].\Delta x$

Momen dan Pusat Massa Lamina

Dari taksiran irisan tadi, kita peroleh

Massa: $$m = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-y: $$M_y = \delta \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-x: $$M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

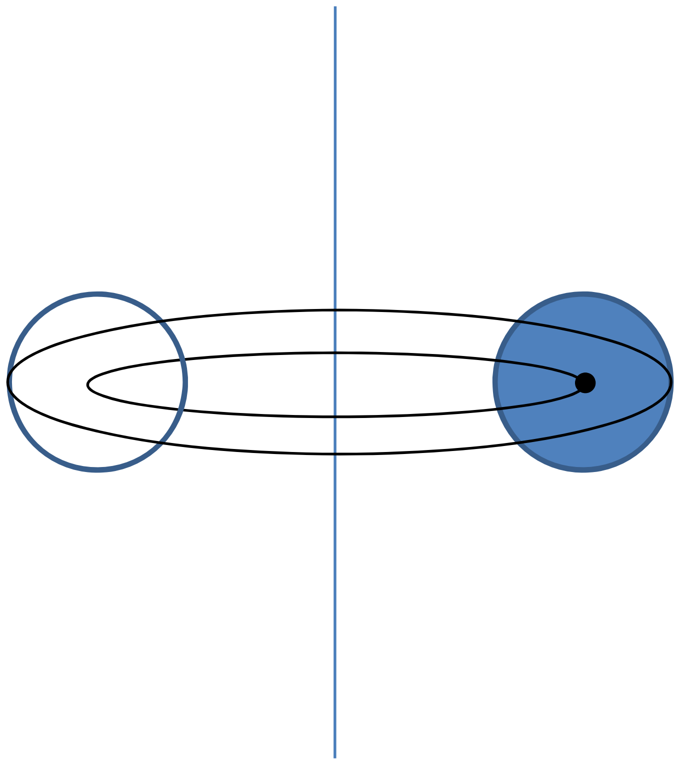
Pusat massa: $$x^* = \frac{M_y}{m};\ y^* = \frac{M_x}{m}.$$

Contoh

Tentukan pusat massa lamina yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu-x, dan garis $x = 4$. [Gambar terlebih dahulu daerah lamina tsb.]

Teorema Pappus

Jika suatu daerah R pada bidang diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang tsb yang tidak memotong R, maka volume benda putar yang terbentuk sama dengan luas daerah R kali keliling lingkaran yang ditempuh oleh pusat massa R.



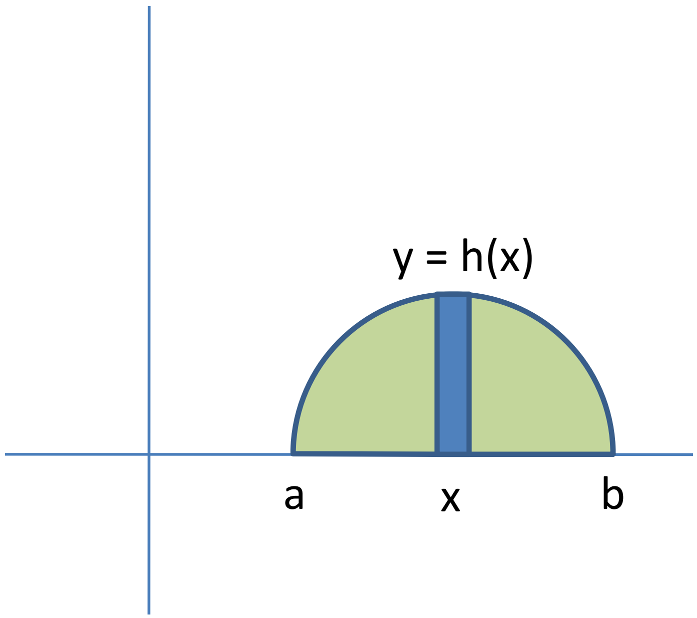
Mengapa Teorema Pappus Berlaku

Perhatikan gambar di bawah. Dengan metode kulit tabung, kita peroleh:

$$V = 2\pi \int_a^b x h(x)\,dx$$

$$x^* = \frac{\int_a^b x h(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}$$

$$V = 2\pi x^* \int_a^b h(x)\,dx.$$



Contoh

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu-x, dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi garis $y = 3$. Tentukan volume bendar putar yang terbentuk.

Latihan

1. Tentukan pusat massa lamina yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. Menggunakan Teorema Pappus, tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah pada Soal 1 diputar mengelilingi garis $y = -x$.