

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

20 November 2013

Apa yang Telah Dipelajari pada Bab 5

1. Luas Daerah
2. Volume Benda Putar: Metode Cakram/Cincin
3. Volume Benda dengan Penampang Tertentu: Metode Irisan Sejajar
4. Volume Benda Putar: Metode Kulit Tabung
5. Kerja dan Gaya Fluida
6. Momen dan Pusat Massa

MA1101 MATEMATIKA 1A

BAB 6. FUNGSI TRANSENDEN

11/20/2013

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.1 Fungsi Logaritma Natural

- Menentukan turunan dari fungsi logaritma natural dan variannya.
- Menentukan integral tak tentu dari $1/u$ dan variannya.
- Menurunkan fungsi secara logaritmik.

6.2 Fungsi Invers dan Turunannya

Menentukan invers dari suatu fungsi dan turunannya.

MA1101 MATEMATIKA 1A

6.1 FUNGSI LOGARITMA NATURAL

- Menentukan turunan dari fungsi logaritma natural dan variannya.
- Menentukan integral tak tentu dari $1/u$ dan variannya.
- Menurunkan fungsi secara logaritmik.

The Missing Link

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} \right) = x^1$$

$$\frac{d}{dx} (x) = x^0$$

$$\frac{d}{dx} (?) = x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx} (-x^{-1}) = x^{-2}$$

Fungsi Logaritma Natural (ln)

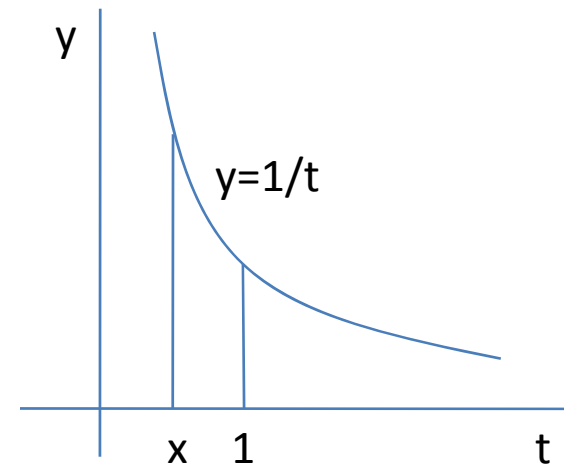
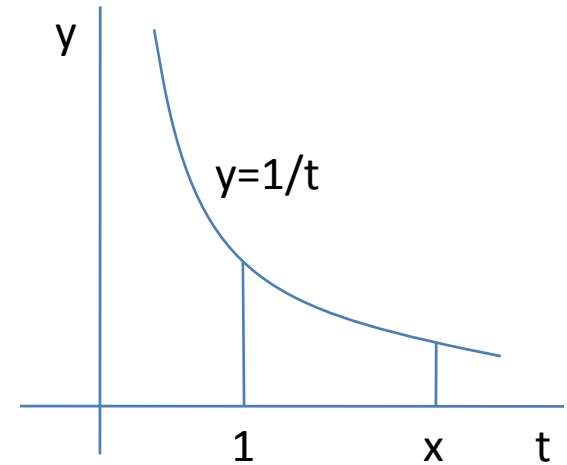
Definisi: $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0.$

Cttn. Nilai $\ln x$ menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = 1/t$, $1 \leq t \leq x$. Karena itu,

$\ln x < 0$ jika $0 < x < 1$

$= 0$ jika $x = 1$

> 0 jika $x > 1$.



Turunan dari $\ln x$

Menurut Teorema Dasar Kalkulus,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Contoh

1. Tentukan $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$.

Jawab:
$$\frac{d}{dx} \ln(x^2) = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

2. Tentukan $\frac{d}{dx} \ln |x|$.

Jawab:

Integral Tak Tentu dari $1/u$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C.$$

Contoh:

1. Tentukan $\int \frac{dx}{x+1}$.

Jawab: Misal $u = x + 1$. Maka $du = dx$, shg

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |x+1| + C.$$

Contoh

2. Tentukan $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Jawab:

3. Hitung $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Jawab:

Teorema (Sifat-Sifat Logaritma)

- $\ln 1 = 0$
- $\ln a.b = \ln a + \ln b$
- $\ln a/b = \ln a - \ln b$
- $\ln a^r = r \ln a$

Contoh

Tentukan dy/dx jika $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Jawab: Menggunakan Teorema sebelumnya

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2} [\ln(x-1) - \ln(x+1)]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Penurunan Logaritmik

Tentukan dy/dx bila $y = \frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$.

Jawab: Ambil \ln dari kedua ruas, lalu turunkan terhadap x :

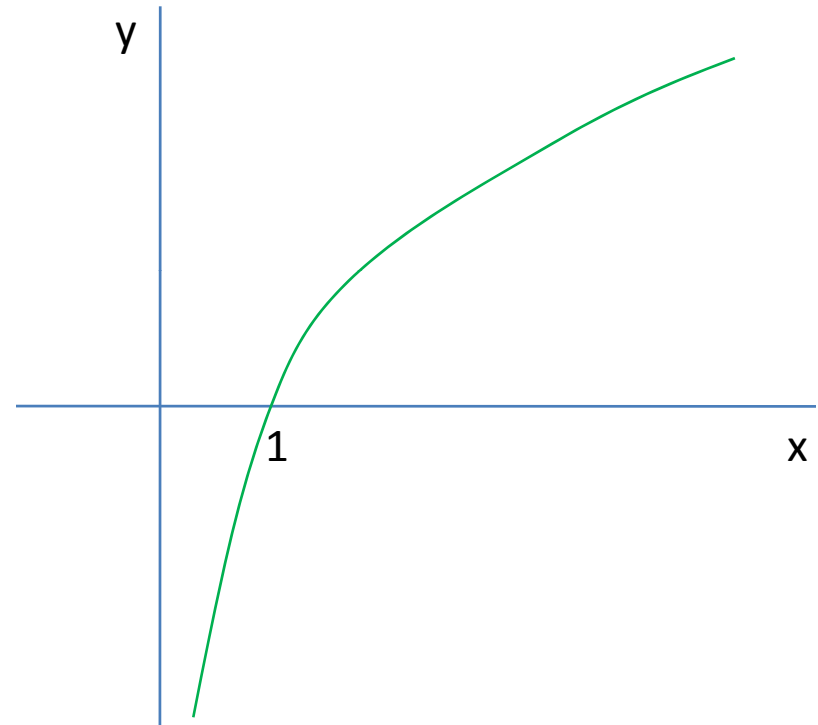
$$\ln y = \ln(x+11) - \frac{1}{2} \ln(x^3-4)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+11} - \frac{1}{2} \frac{3x^2}{x^3-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+11} - \frac{3x^2}{2(x^3-4)} \right) \frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$$

Grafik Fungsi $y = \ln x$

Catat bahwa $\ln 1 = 0$,
 $dy/dx = 1/x > 0$ dan
 $d^2y/dx^2 = -1/x^2 < 0$
sehingga grafik $y = \ln x$
monoton naik dan
cekung ke bawah.



Latihan

1. Tentukan $\int \tan(2x) dx$.

2. Tentukan semua nilai ekstrim dari

$$f(x) = 2x^2 \ln x - x^2$$

pada daerah asalnya.

3. Tentukan dy/dx jika $y = \frac{(x+1)^{3/2} (x^2-1)^2}{\sqrt{x-2}}$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

6.2 FUNGSI INVERS DAN TURUNANNYA

Menentukan invers dari suatu fungsi dan turunannya.

Fungsi Invers

Dalam hal tertentu, dari persamaan fungsi $y = f(x)$ kita dapat memperoleh x sebagai fungsi dari y , sebutlah $x = g(y)$. Fungsi g disebut invers dari f , ditulis

$$g = f^{-1}.$$

Jadi: $y = f(x)$ jika dan hanya jika $x = f^{-1}(y)$.

Contoh:

$$y = 2x + 3 \text{ jika dan hanya jika } x = \frac{1}{2}(y - 3).$$

Cttn. Grafik $y = f^{-1}(x)$ merupakan pencerminan grafik $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$.

Teorema (Eksistensi Invers)

Jika f fungsi 1-1, maka f mempunyai invers.

Akibatnya,

jika f monoton sejati, maka f mempunyai invers.

Turunan dari Fungsi Invers

Jika $y = f(x)$ dan $f'(x) \neq 0$, maka

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dalam notasi Leibniz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Contoh

Diketahui $y = x^5 + x + 1 = f(x)$. Tentukan $(f^{-1})'(3)$.

Jawab: $3 = f(1)$. Lalu, f monoton naik karena $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ untuk setiap x . Jadi, f^{-1} ada.

Menurut Teorema tadi,

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5 \cdot 1^4 + 1} = \frac{1}{6}.$$

Latihan

1. Hitung $(f^{-1})'(2)$ apabila $f(x) = 3x^5 + x - 2$.
2. Buktikan bahwa $y = f(x) = \ln x$ mempunyai invers, sebutlah $y = g(x)$. Kemudian buktikan bahwa $g'(x) = g(x)$.