

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

22 November 2013

Latihan

1. Hitung $(f^{-1})'(2)$ apabila $f(x) = 3x^5 + x - 2$.
2. Buktikan bahwa $y = f(x) = \ln x$ mempunyai invers, sebutlah $y = g(x)$. Kemudian buktikan bahwa $g'(x) = g(x)$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.3 Fungsi Eksponen Natural

- Menentukan turunan dari fungsi eksponen natural dan variannya.
- Menentukan integral tak tentu dari e^u dan variannya.

6.4 Fungsi Eksponen dan Logaritma Umum

- Menentukan turunan dan integral dari fungsi eksponen umum.
- Menentukan turunan dari fungsi logaritma umum.

MA1101 MATEMATIKA 1A

6.3 FUNGSI EKSPONEN NATURAL

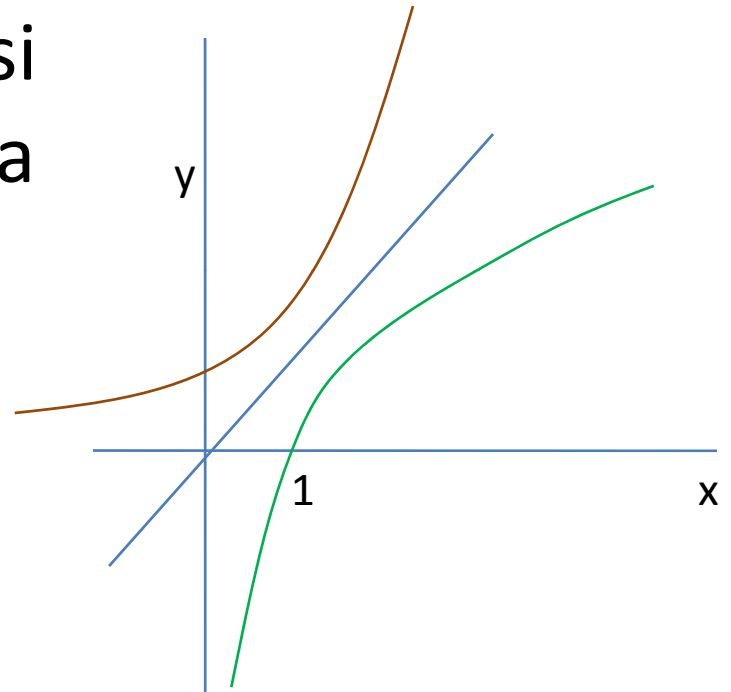
- Menentukan turunan dari fungsi eksponen natural dan variannya.
- Menentukan integral tak tentu dari e^u dan variannya.

Fungsi Eksponen Natural (exp)

Dari soal latihan terakhir, fungsi $y = \ln x$ monoton naik, sehingga mempunyai invers.

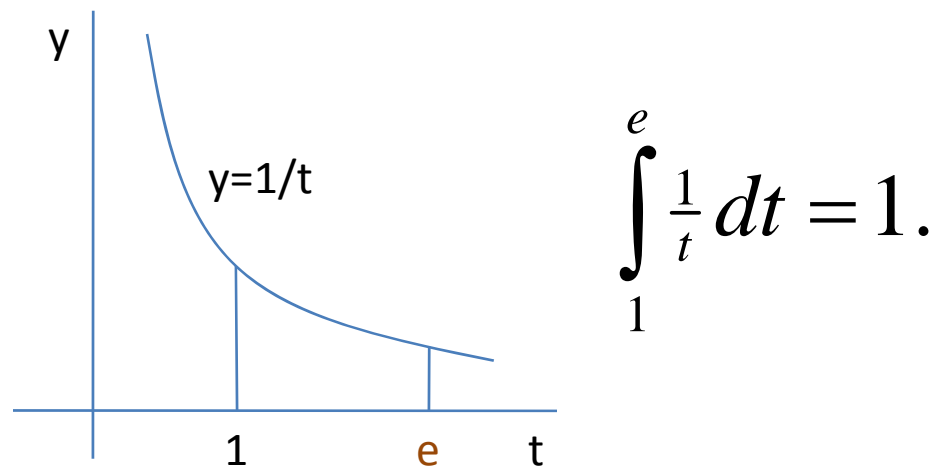
Definisi: $x = \exp y$ j.h.j. $y = \ln x$.

Sifat: $\exp(\ln x) = x$ utk tiap $x > 0$
 $\ln(\exp y) = y$ utk tiap $y \in \mathbf{R}$.



Bilangan e

Definisi: Bilangan e adalah bilangan real positif yang memenuhi $\ln e = 1$.



Catatan. $e \approx 2,718281828459045\dots$

Fungsi exp adalah fungsi eksponen!

Perhatikan bahwa untuk tiap $r \in \mathbb{Q}$ berlaku:

$$e^r = \exp(\ln e^r) = \exp(r \ln e) = \exp r$$

Ini menunjukkan bahwa fungsi **exp** merupakan **fungsi eksponen**, dengan eksponen **e**.

Catatan. Fungsi eksponen berbeda dengan **fungsi pangkat**. Pada fungsi pangkat, yang merupakan peubah adalah bilangan yang dipangkatkan. Pada fungsi eksponen, yang merupakan peubah adalah pangkatnya.

Jadi ...

$$e^{\ln x} = x, \quad \forall x > 0$$

$$\ln(e^y) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Juga:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b.$$

Bagaimana membuktikan sifat terakhir di atas?

[Gunakan sifat-sifat logaritma!]

Turunan dari $y = e^x$

Dari $x = \ln y$, kita peroleh

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y.$$

Jadi

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Integral Tak Tentu dari $y = e^x$

Dari hasil sebelumnya, kita peroleh

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Contoh

1. Tentukan dy/dx bila $y = e^{x^2}$.

Jawab: Dengan Aturan Rantai, kita peroleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{x^2}) = e^{x^2} \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \cdot e^{x^2}.$$

Contoh

2. Tentukan $\int xe^{x^2} dx$.

Jawab: Misalkan $u = x^2$. Maka, $du = 2x \cdot dx$, sehingga

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Latihan

1. Tentukan dy/dx bila $y = xe^{2x}$.

2. Tentukan $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

3. Hitunglah $\int_0^1 e^{2x} dx$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

6.4 FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA UMUM

- Menentukan turunan dan integral dari fungsi eksponen umum.
- Menentukan turunan dari fungsi logaritma umum.

Fungsi Eksponen a^x

Jika $a > 0$ dan r rasional, maka

$$a^r = \exp(\ln a^r) = \exp(r \ln a) = e^{r \ln a}.$$

Definisi: Untuk $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$, kita definisikan

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Catatan: Jika $a = e$, maka $a^x = e^{x \cdot \ln e} = e^x$. [konsisten]

Sifat-Sifat Fungsi Eksponen

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = a^x \div a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Teorema

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1.$$

Contoh

1. Tentukan dy/dx jika $y = 2^{\sqrt{x}}$.

$$\text{Jawab: } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2^{\sqrt{x}}) = 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}.$$

2. Tentukan $\int x^2 5^{x^3} dx$.

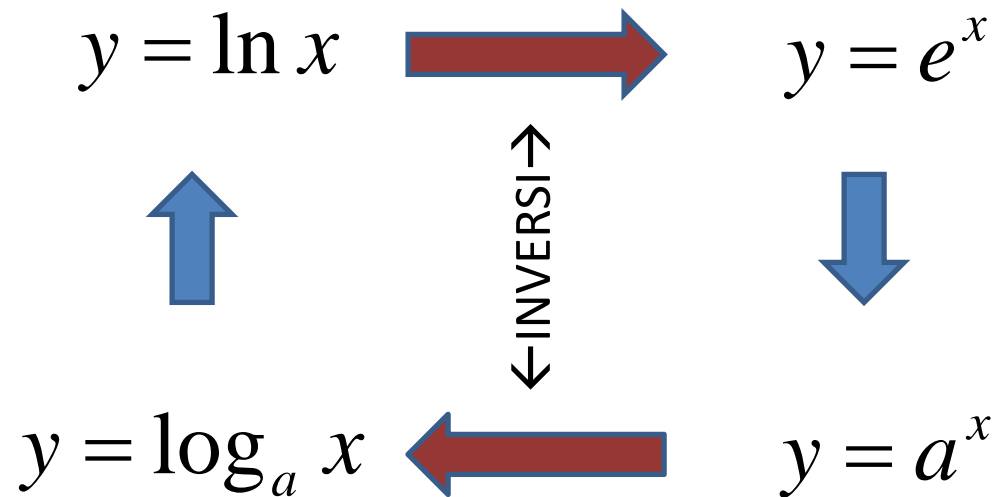
Jawab:

Fungsi Logaritma Umum $\log_a x$

Definisi: Misal $a > 0$, $a \neq 1$. Kita definisikan

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

Catat jika $a = e$, maka $\log_a x = \ln x$.



Catatan

Jika $y = \log_a x$, maka $x = a^y$, sehingga

$$\ln x = \ln a^y = y \ln a.$$

Karena itu,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

sehingga

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Jadi

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Contoh

Tentukan dy/dx jika $y = \log_{10}(x^2 + 1)$.

Jawab: Misalkan $u = x^2 + 1$. Maka $y = \log_{10} u$, sehingga ...

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u \ln 10} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 10}\end{aligned}$$

Latihan

1. Tentukan $\frac{d}{dx}(10^{x^2})$.

2. Hitunglah $\int_0^1 5^{3x} dx$.

3. Buktikan bahwa $y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, $a \neq 1$, monoton.
Tentukan inversnya.