MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

27 November 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu)

1. Tentukan $\frac{d}{dx}(10^{x^2})$.
2. Hitunglah $\int_0^1 5^{3x}\,dx$.
3. Buktikan bahwa $y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}, \quad a \neq 1$, monoton. Tentukan inversnya.

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.5 Pertumbuhan dan Peluruhan Ekponensial

- Menyelesaikan persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah pertumbuhan dan peluruhan eksponensial.

6.6 Fungsi Trigonometri Invers

- Menentukan turunan fungsi trigonometri invers (dan integral yang bersesuaian).

MA1101 MATEMATIKA 1A

6.5 PERTUMBUHAN DAN PELURUHAN EKSPONENSIAL

- Menyelesaikan persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah pertumbuhan dan peluruhan eksponensial.

Pertumbuhan Eksponensial

Misalkan suatu populasi bertambah sebesar Δy dalam waktu Δt, dan pertambahan populasi tsb **sebanding** dengan banyaknya penduduk pada waktu itu dan dengan lebar selang waktu, yakni

$$\Delta y = k\, y\, \Delta t.$$

dengan $y = y(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t, dan k konstanta. Jadi

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k.dt$$

Integralkan kedua ruas, kita peroleh

$$\ln y = kt + C$$

$$y = e^{kt+C} = Ae^{kt}$$

Misalkan diketahui jumlah populasi awal $y(0) = y_0$. Maka $y_0 = Ae^0 = A$, sehingga

$$y = y_0 e^{kt}.$$

Nilai k dapat ditentukan apabila kita mempunyai informasi tambahan, misalnya $y(10) = 2y_0$ (**waktu melipat ganda** = 10 satuan waktu).

Contoh

Misalkan suatu koloni bakteri berkembang biak dengan laju sebanding dengan banyaknya bak-teri pada saat itu. Bila pada awal pengamatan terdapat 10.000 bakteri dan setelah 10 hari terdapat 24.000 bakteri, berapa banyaknya bakteri setelah 25 hari?

Jawab: Misalkan $y = y(t)$ menyatakan banyaknya bakteri pada saat t. Maka (seperti tadi)

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow y = Ae^{kt}$$

Pada saat $t = 0$, diketahui $y = 10.000$. Jadi

$$10.000 = A.e^{0} = A,$$

sehingga $$y = 10.000e^{kt}.$$

Pada saat $t = 10$, diketahui $y = 24.000$. Jadi

$$24.000 = 10.000e^{10k},$$

sehingga
$$e^{10k} = 2{,}4$$
$$10k = \ln 2{,}4$$
$$k = \tfrac{1}{10}\ln 2{,}4.$$

Pada saat $t = 25$,
$$y = 10.000e^{(2{,}5)\ln 2{,}4} = 10.000(2{,}4)^{2{,}5}.$$

Peluruhan Eksponensial

Mirip dengan pertumbuhan eksponensial yang terjadi pada suatu populasi, peluruhan eksponensial terjadi pada zat radioaktif.

Zat radioaktif meluruh dengan laju sebanding dengan banyaknya zat yang tersisa pada saat itu.

Jika $y = y(t)$ menyatakan banyaknya zat yang tersisa pada saat t, maka

$$\frac{dy}{dt} = -ky; \quad \therefore y = Ae^{-kt} \quad (k > 0)$$

Hukum Pendinginan Newton

Jika suatu benda dimasukkan ke dalam ruangan dengan suhu tetap $T_{1,}$ maka --menurut Newton-- benda tsb akan mengalami pendinginan dengan laju sebanding dengan selisih suhunya (T) dengan suhu ruangan (T_1), yakni

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1).$$

Jadi kita peroleh $T = T_1 + Ae^{kt}.$

Latihan

Misalkan suatu zat radioaktif meluruh dengan laju sebanding dengan banyaknya zat yang tersisa pada saat itu. Diketahui pada awal peng-amatan terdapat 20 gram dan setelah 1 tahun tersisa 15 gram. Tentukan **waktu paruh** zat tsb.

Jawab: Misalkan $y = y(t)$ menyatakan banyaknya zat pada saat t. Maka ...

6.6 FUNGSI TRIGONOMETRI INVERS

- Menentukan turunan fungsi trigonometri invers (dan integral yang bersesuaian).

Fungsi Trigonometri Invers

Fungsi $y = \sin x$ naik pada $[-\pi/2, \pi/2]$, karena itu mempunyai invers $x = \sin^{-1} y$ pada $[-1, 1]$.

$x = \sin^{-1} y$, $-1 \le y \le 1$ j.h.j. $y = \sin x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.

Fungsi $y = \cos x$ turun pada $[0, \pi]$, karena itu mempunyai invers $x = \cos^{-1} y$ pada $[-1, 1]$.

$x = \cos^{-1} y$, $-1 \le y \le 1$ j.h.j. $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$.

Fungsi Trigonometri Invers

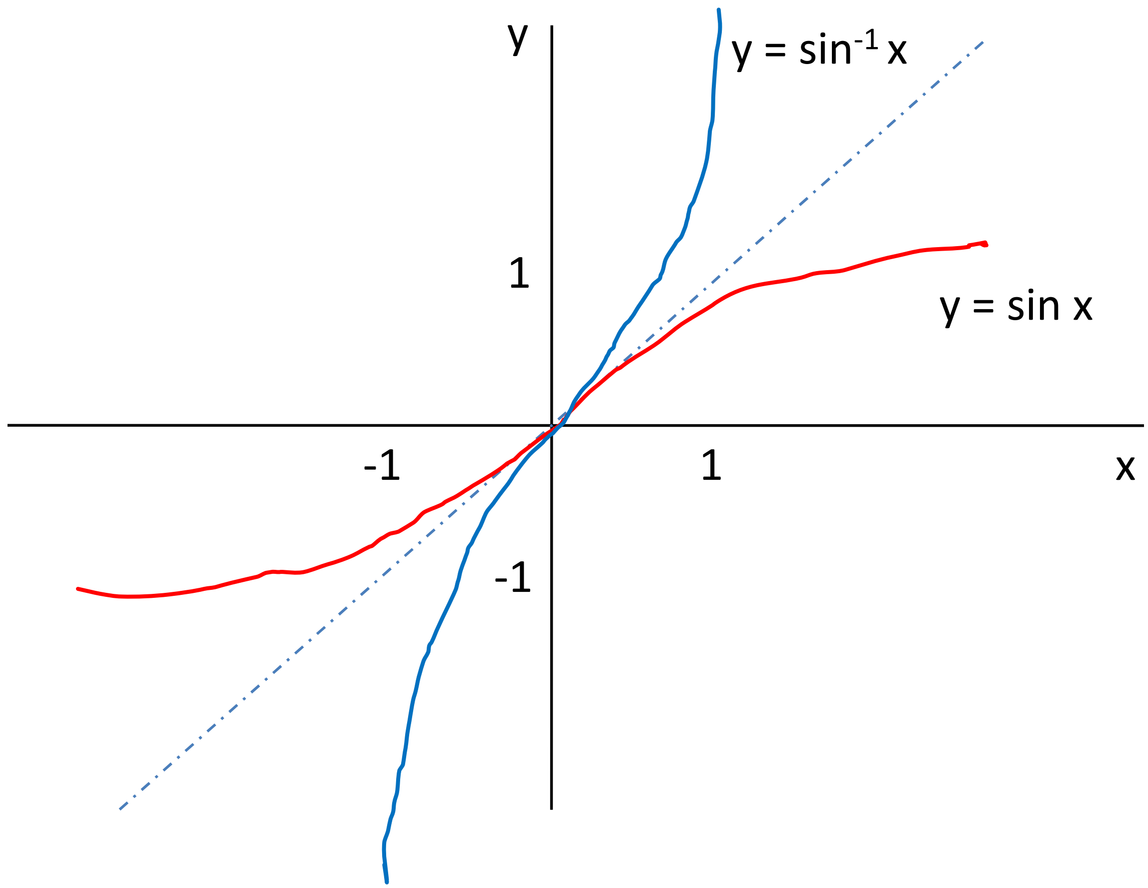
Fungsi $y = \tan x$ naik pada $(-\pi/2, \pi/2)$, karena itu mempunyai invers $x = \sin^{-1} y$ pada $(-\infty, \infty)$.

$x = \tan^{-1} y, -\infty < x < \infty$ j.h.j. $y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2$.

Fungsi $y = \sec x$ 1-1 pada $[0, \pi] - \{\pi/2\}$, karena itu mempunyai invers $x = \sec^{-1} y$ pada $\{y : |y| \geq 1\}$.

$x = \sec^{-1} y, |y| \geq 1$ j.h.j. $y = \sec x, 0 \leq x \leq \pi, x \neq \pi/2$.

Grafik Fungsi Trigonometri Invers



Contoh

$$\sin^{-1}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sec^{-1}(-1) = \pi.$$

Beberapa Kesamaan

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\tan(\sec^{-1} x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

$$(+\, jika : x \geq 1; -\, jika : x \leq -1)$$

Contoh

$$1.\sin(2\cos^{-1}\tfrac{2}{3}) = 2\sin(\cos^{-1}\tfrac{2}{3})\cos(\cos^{-1}\tfrac{2}{3})$$

$$= 2\sqrt{1-(\tfrac{2}{3})^2}.\frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

$$2.\tan(\sin^{-1}x) = \frac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Turunan Fungsi Trigonometri Invers

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

Bukti bahwa $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Misal $y = \sin^{-1} x$. Maka $x = \sin y$. Turunkan kedua ruas secara implisit terhadap x, diperoleh

$$1 = \cos y.(dy/dx).$$

Jadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integral yang Menghasilkan Fungsi Trigonometri Invers

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + D$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} |x| + C$$

Contoh

Hitung $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Jawab: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x \Big|_{-1}^{1} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Latihan

Seseorang yang tingginya ~1,60 m berdiri di tepi atas tebing, melihat ke laut yang berada ~18,40 m di bawahnya. Pada saat itu terdapat perahu yang menjauhi tebing dengan laju 5 m/det. Bila θ menyatakan besar sudut pandang-nya (terhadap garis horisontal), berapakah besarnya **laju perubahan θ terhadap waktu**, pada saat perahu tsb berjarak 50 m dari tebing?