

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

4 September 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu)

1. Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. → sudah dijawab
2. Gambar grafik fungsi berikut dan tuliskan beberapa karakteristiknya.
 - a. $y = x^3$. ← bahas sekarang
 - b. $y = x^4$.
 - c. $y = 1 - x^4$.
 - d. $y = \sqrt{1-x^2}$. ← bahas sekarang

Sasaran Kuliah Hari Ini

0.6 Operasi pada Fungsi

Melakukan operasi pada fungsi dan menentukan daerah asal fungsi yang dihasilkan

0.7 Beberapa Fungsi Khusus

Mengenal beberapa fungsi khusus, baik per-samaan maupun sifat-sifatnya

MA1101 MATEMATIKA 1A

0.6 OPERASI PADA FUNGSI

Operasi Aljabar pada Fungsi

Seperti pada bilangan, kita dapat melakukan **penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian** pada fungsi secara *titik demi titik*. Jika f terdefinisi pada D_f dan g terdefinisi pada D_g , maka

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f/g)(x) := f(x)/g(x), \quad x \in D_f \cap D_g, \quad g(x) \neq 0.$$

Contoh

Diketahui $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, dan $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Maka

- a. $(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$.
- b. $(f - g)(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$.
- c. $(fg)(x) = x^2\sqrt{x}$, $x \geq 0$.
- d. $(f/g)(x) = x^2/\sqrt{x} = x\sqrt{x}$, $x > 0$.

Catatan. Perhatikan bahwa daerah asal f/g tidak mencakup $x = 0$, sekalipun $x\sqrt{x}$ terdefinisi di $x=0$.

Pangkat dan Akar

Kita juga dapat melakukan operasi **pangkat** dan **akar** pada fungsi, selama memungkinkan.

Untuk $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$(f^n)(x) := [f(x)]^n, \quad x \in D_f.$$

$$(f^{-n})(x) := 1/[f^n(x)], \quad x \in D_f, f(x) \neq 0.$$

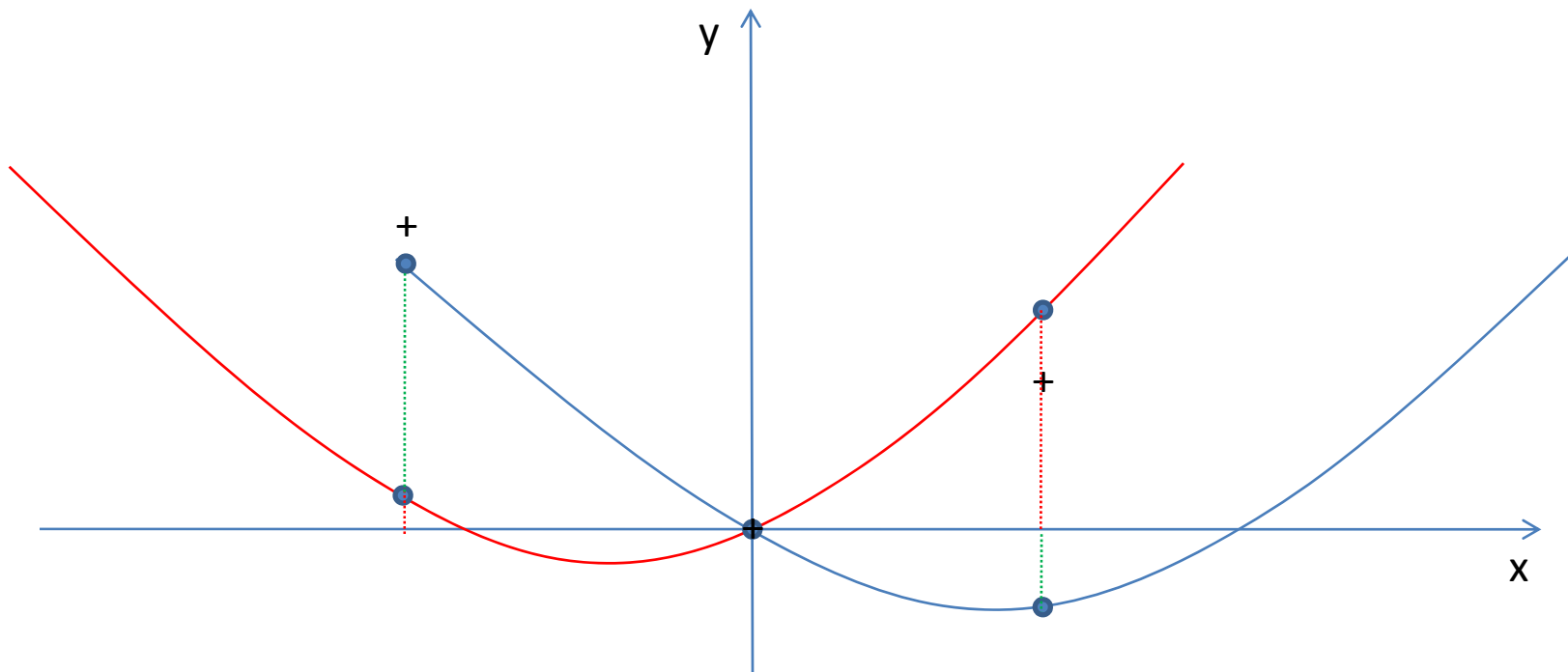
$$(f^{1/n})(x) := [f(x)]^{1/n}, \quad x \in D_f, f(x) \geq 0 \text{ utk } n \text{ genap.}$$

Catatan 1. $f^{-1}(x) = 1/f(x)$, namun lambang f^{-1} kelak akan dipakai untuk keperluan lain. Karena itu, untuk f pangkat -1 kita akan menuliskannya sbg $1/f$ saja.

Catatan 2. $f^{1/2}(x) = \sqrt{f(x)}$ terdefinisi jika $f(x) \geq 0$.

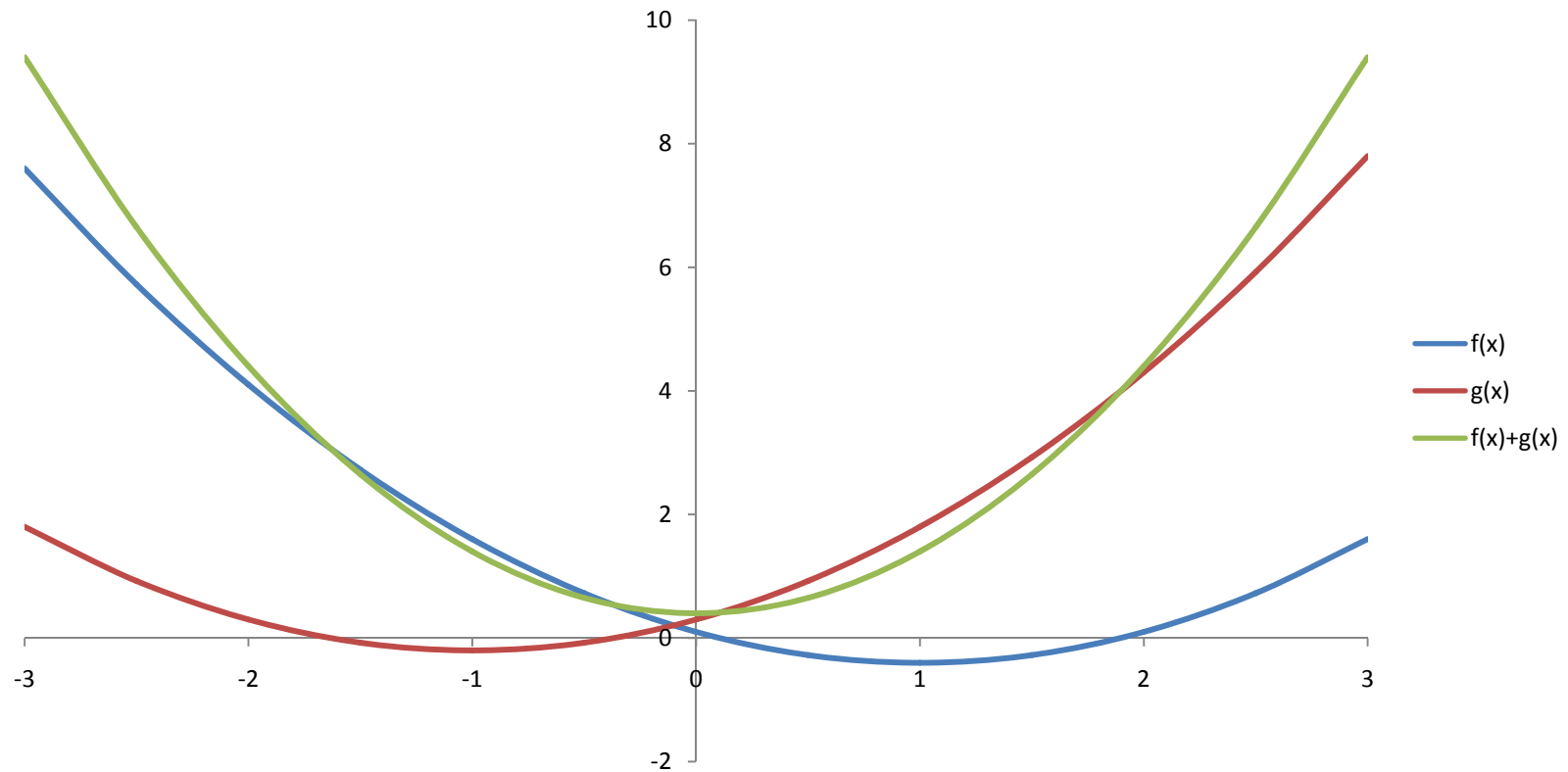
Menggambar Grafik Fungsi $f + g$

Diketahui grafik fungsi f dan g , bagaimana kita dapat memperoleh grafik $f + g$? [titik demi titik]



Menggambar Grafik Fungsi $f + g$

Diketahui grafik fungsi f dan g , bagaimana kita dapat memperoleh grafik $f + g$? [titik demi titik]



Fungsi Komposisi

Bila x dipetakan ke $y = f(x)$ oleh f , dan kemudian y dipetakan ke $z = g(y)$ oleh g , maka kita peroleh $z = g(f(x))$. Dalam hal ini:

$$x \rightarrow y = f(x) \rightarrow z = g(f(x)).$$

Komposisi f dan g , yang dilambangkan dengan $g \circ f$, merupakan fungsi yang memetakan x ke $z = g(f(x))$, yakni

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Daerah Asal Fungsi Komposisi

Daerah asal $g \circ f$ adalah himpunan semua $x \in D_f$ sedemikian sehingga $f(x) \in D_g$, yakni

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}.$$

Contoh: Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2$. Maka

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Daerah asalnya adalah

$$D_{g \circ f} = \{ x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbf{R} \} = [0, \infty).$$

Perhatikan bahwa sekalipun $g \circ f$ memetakan x ke x , daerah asalnya hanya $[0, \infty)$.

Catatan

Komposisi dua fungsi tidak bersifat komutatif.
Untuk f dan g pada contoh sebelumnya, kita mempunyai

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Daerah asalnya adalah

$$D_{f \circ g} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 \in [0, \infty) \} = \mathbf{R}.$$

Jadi, tampak bahwa $f \circ g \neq g \circ f$.

Latihan

1. Diketahui $f(x) = x^2 + 3$ dan $g(x) = 1/x$.
Tentukan $f + g$, $f - g$, fg , f/g , f^2 , dan \sqrt{g} , beserta daerah asalnya.
2. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = 1/x$. Tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$, beserta daerah asalnya.

MA1101 MATEMATIKA 1A

0.7 BEBERAPA FUNGSI KHUSUS

Fungsi Polinom

Fungsi Konstan: $f(x) = k$ (konstanta).

Fungsi Identitas $f(x) = x$.

Fungsi Linear: $f(x) = mx + n$.

Fungsi Kuadrat: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Keempat fungsi di atas termasuk keluarga besar

Fungsi Polinom: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

dengan a_0, a_1, \dots, a_n konstanta, dan $a_n \neq 0$.

Di sini, $n \in \mathbf{N}$ merupakan **derajat** polinom tersebut.

Catatan: Daerah asal fungsi polinom adalah \mathbf{R} .

Fungsi Rasional & Fungsi Aljabar

Fungsi f yang merupakan hasilbagi dua fungsi polinom, yakni

$f(x) = p(x)/q(x)$, dengan p dan q polinom, disebut **fungsi rasional**. Sebagai contoh,

$$f(x) = x/(x^2 + 1)$$

merupakan fungsi rasional.

Fungsi seperti $g(x) = \sqrt{x}$ dan $h(x) = x^{1/3} + 10$ merupakan **fungsi aljabar**.

Catatan

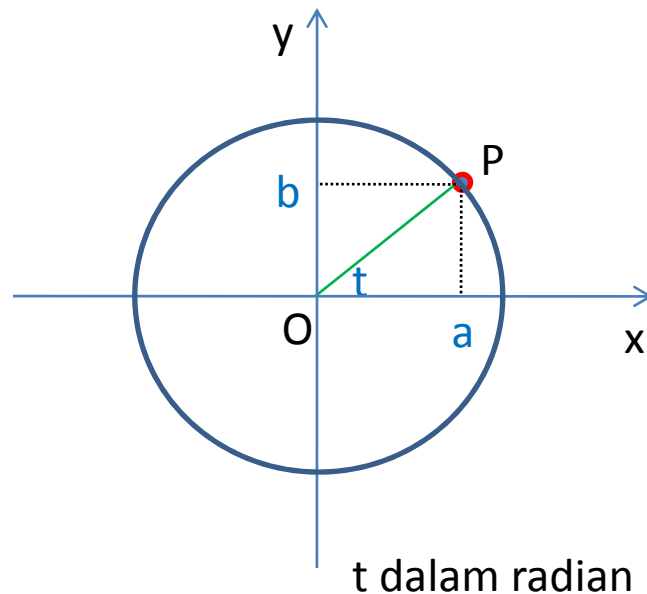
Fungsi Nilai Mutlak $f(x) = |x|$ termasuk fungsi aljabar, mengingat $|x| = \sqrt{x^2}$. Dalam hal ini, jika $y = |x|$, maka y memenuhi persamaan $y^2 = x^2$.

Secara umum, $y = f(x)$ merupakan fungsi aljabar jika y memenuhi suatu **persamaan aljabar** seperti $y^2 = x^2$ atau $y^3 = 3x^2 + 5x$ dan sejenisnya.

Sebagai contoh, $y = x^{1/3} + 10$ adalah fungsi aljabar; ia memenuhi persamaan $(y - 10)^3 = x$.

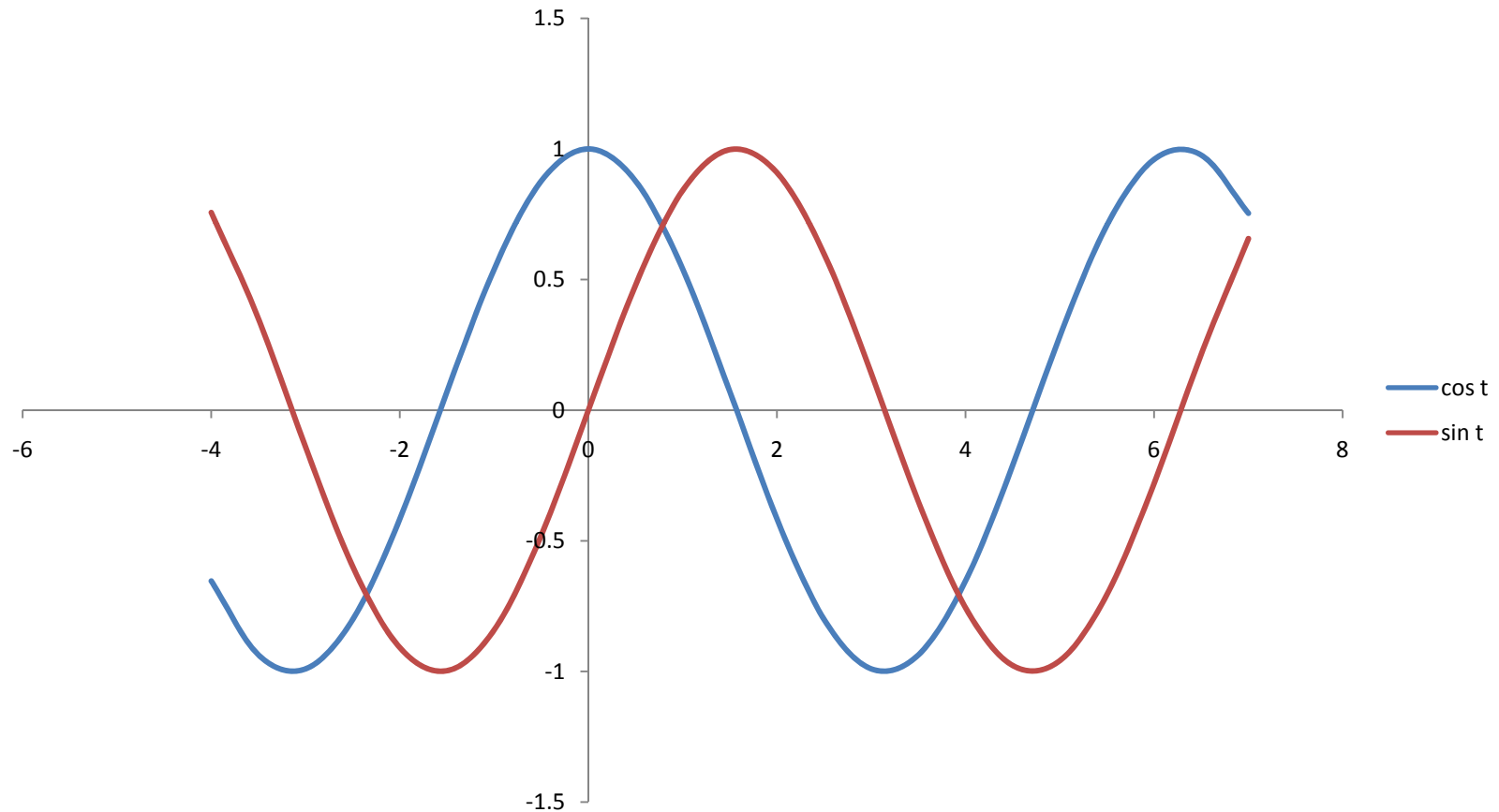
Fungsi Trigonometri

Tidak semua fungsi merupakan fungsi aljabar. Salah satu kelompok fungsi yang tidak termasuk fungsi aljabar adalah **fungsi trigonometri**.



Bayangkan titik P berputar pada lingkaran berjari-jari 1 yg berpusat di $O(0,0)$, lalu catat absis (**a**) dan ordinat (**b**) sbg fungsi dari sudut (**t**) antara OP dan sumbu-x positif.

Grafik Fungsi Cosinus dan Sinus



Fungsi Tan, Cot, Sec, dan Csc

Dari $\cos t$ dan $\sin t$, kita definisikan

$$\tan t = \sin t / \cos t$$

$$\cot t = \cos t / \sin t$$

$$\sec t = 1 / \cos t$$

$$\csc t = 1 / \sin t$$

Beberapa Sifat Fungsi Trigonometri

$\cos(-x) = \cos x$ [yakni, $y = \cos x$ **fungsi genap**]

$\sin(-x) = -\sin x$ [yakni, $y = \sin x$ **fungsi ganjil**]

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x$$

... dan masih banyak kesamaan trigonometri lainnya!

Latihan

1. Tentukan daerah asal fungsi rasional berikut:

a. $f(x) = x/(x^2 - 1)$.

b. $g(x) = 1/(x^2 + x)$.

2. Sketsalah grafik fungsi berikut:

a. $y = \sin 2t, t \in [-2\pi, 2\pi]$.

b. $y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$.