MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

6 September 2013

Apa yang Telah Anda Pelajari pada Bab Sebelumnya:

0.1 Bilangan Real, Estimasi dan Logika

0.2 Pertaksamaan dan Nilai Mutlak

0.3 Sistem Koordinat Cartesius

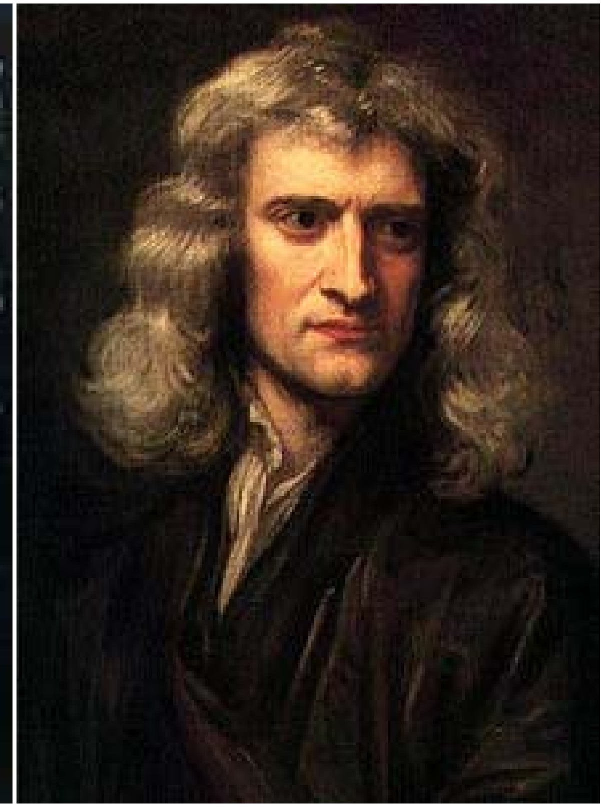
0.4 Grafik Persamaan

0.5 Fungsi dan Grafiknya

0.6 Operasi pada Fungsi

0.7 Beberapa Fungsi Khusus

http://www.123rf.com



http://en.wikipedia.org

MA1101 MATEMATIKA 1A

BAB 1. LIMIT DAN KEKONTINUAN

Sasaran Kuliah Hari Ini

1.1 Pengantar Limit

Memahami konsep limit dan menentukan nilai limit secara intuitif.

1.2 Limit Fungsi

Memahami definisi limit dan membuktikan limit fungsi sederhana dengan menggunakan definisi.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.1 PENGANTAR LIMIT

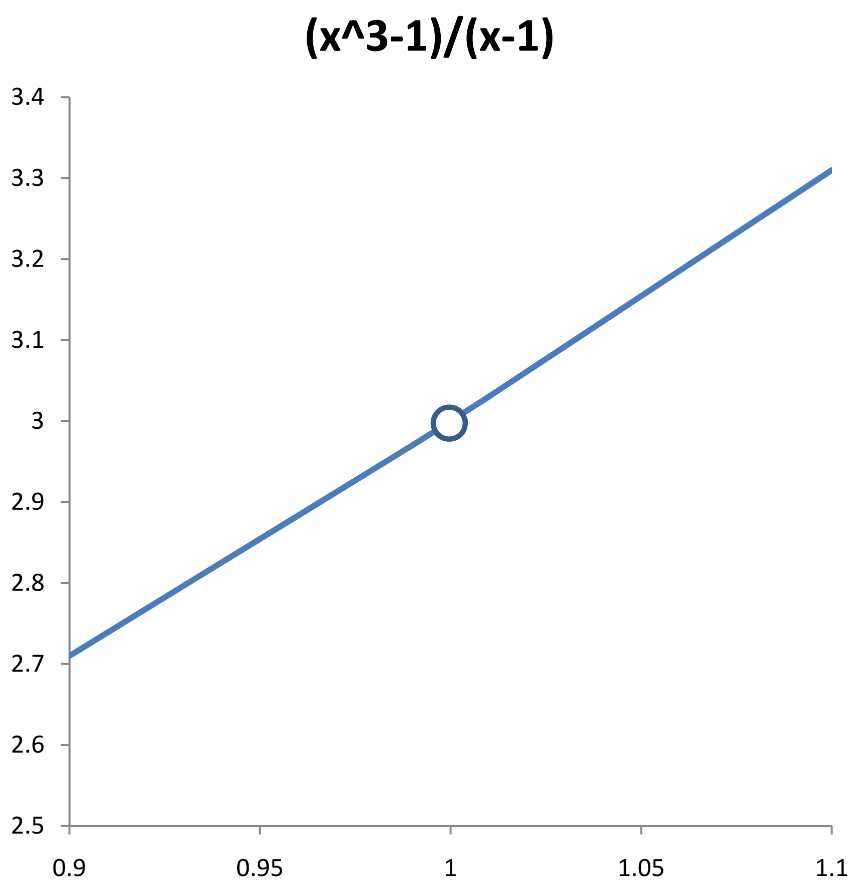
Pengantar Limit

Fungsi $f(x) = (x^3 – 1)/(x – 1)$ terdefinisi untuk setiap $x \in$ **R** kecuali untuk $x = 1$. Bila kita harus menggambar grafiknya, apa yang terjadi *di sekitar* $x = 1$?

Kita melihat dari tabel di samping bahwa nilai f(x) *mendekati* 3. Bagaimana kita meyakinkan hal ini?

x	f(x)
1,1	3,31
1,01	3,0301
1,001	3,003001
"1"	?
0,999	2,997001
0,99	2,9701
0,9	2,71

Pengantar Limit



x	f(x)
1,1	3,31
1,01	3,0301
1,001	3,003001
“1”	?
0,999	2,997001
0,99	2,9701
0,9	2,71

Makna Limit secara Intuitif

Catatan. Nilai x di dekat c tidak mencakup x = c. Fungsi f tdk harus terdefinisi di x = c.

Kita tuliskan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ apabila

jika x dekat ke c, maka nilai f(x) dekat ke L.

$\lim_{x \to c} f(x)$ disebut "**limit** f **di** c".

Bilangan L merupakan nilai **limit** tersebut.

Untuk contoh sebelumnya, kita mempunyai

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Limit Kanan dan Limit Kiri

Limit kanan: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti

jika x > c dan dekat ke c, maka f(x) dekat ke L.

Limit kiri: $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ berarti

jika x < c dan dekat ke c, maka f(x) dekat ke L.

Bilakah Limit Ada/Tidak Ada?

Limit fungsi f di c ada jika dan hanya jika limit kanan dan limit kiri f di c ada dan nilainya sama.

Limit f di c tidak ada bila salah satu di antara beberapa kemungkinan berikut terjadi:

1. Limit kanan dan limit kiri f di c ada, tetapi nilainya tidak sama.
2. Limit kanan atau limit kiri f di c tidak ada, karena
   a. Nilai f di dekat c *menuju tak terhingga*.
   b. Nilai f di dekat c *berosilasi*.

Latihan

1. Sketsalah grafik fungsi f yang didefinisikan sbb:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{jika } x < 0 \\ x, & \text{jika } 0 \le x < 1 \\ 1+x, & \text{jika } x \ge 1. \end{cases}$$

   Tentukan nilai f(1) dan nilai limit f di 1 (bila ada).

2. Sketsalah grafik suatu fungsi f yang memenuhi ***semua*** persyaratan berikut:
   a. Daerah asalnya adalah [0,4].
   b. $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$.
   c. Limit f di 1 = 2.
   d. Limit f di 2 = 1.
   e. Limit kanan f di 3 = 1
   f. Limit kiri f di 3 = 2.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.2 LIMIT FUNGSI

Definisi Persis Limit Fungsi

Bila sebelumnya kita telah mencoba memaknai limit fungsi di suatu titik secara intuitif, maka skrg kita akan mendefinisikannya *secara persis*.

Definisi: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika "untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0 sehingga: jika 0 < | x – c | < δ, maka | f(x) – L | < ε."

OMG, ini bukan suatu kalimat yang mudah! Tapi…

Benar/Salah Kalimat Berikut?

1. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}1$, maka $|5x - 5| < 0{,}5$. B
2. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}01$, maka $|5x - 5| < 0{,}05$. B
3. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}005$, maka $|5x - 5| < 0{,}05$. B
4. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}005$, maka $|5x - 5| < 0{,}01$. S
5. Terdapat $\delta = 0{,}002$ sehingga:
   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|5x - 5| < 0{,}01$. B
6. Terdapat $\delta > 0$ sehingga:
   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|5x - 5| < 0{,}001$. B
7. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \varepsilon/5$ sehingga:
   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|5x - 5| < \varepsilon$. B

Benar/Salah Kalimat Berikut?

1. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

   Jika $0 < x < \delta$, maka $|\sqrt{x}| < \varepsilon$.

   Benar; pilih $\delta = \varepsilon^2$.

2. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$.

   Benar; pilih δ = ??

Benar/Salah Kalimat Berikut?

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Benar; bilangan $\delta > 0$ yang memenuhi pernyataan di atas adalah $\delta = \ldots\ldots\ldots$??

Ini membuktikan bahwa: $\lim_{x \to 1} x^2 = 1.$

Latihan

1. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1.$
2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2.$
3. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$