

# **MA1101 MATEMATIKA 1A**

**Hendra Gunawan**

Semester I, 2013/2014

11 September 2013

# Latihan (Kuliah yang Lalu)

1. Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1$ . (sdh dibahas)
2. Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ .
3. Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ . ← **bahas sekarang**

Bukti bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

Diberikan  $\varepsilon > 0$  sembarang, kita harus mencari  $\delta > 0$  sehingga:

jika  $0 < |x - 2| < \delta$ , maka  $|x^2 - 4| < \varepsilon \dots (*)$

Untuk itu, kita bekerja mundur dari bentuk  $|x^2 - 4|$ .

Perhatikan bahwa

$$|x^2 - 4| = |x + 2| |x - 2| \leq (|x| + 2) |x - 2| \dots (+)$$

Jika kita bisa menaksir  $|x|$ , maka tugas kita akan mudah.

Bukti bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

Karena kita sedang berbicara ttg  $x$  di sekitar 2, mari kita asumsikan bahwa  $|x - 2| < 1$ .

Dalam hal ini,  $1 < x < 3$ , sehingga  $|x| < 3$ .

Kembali ke (+), kita dapatkan:

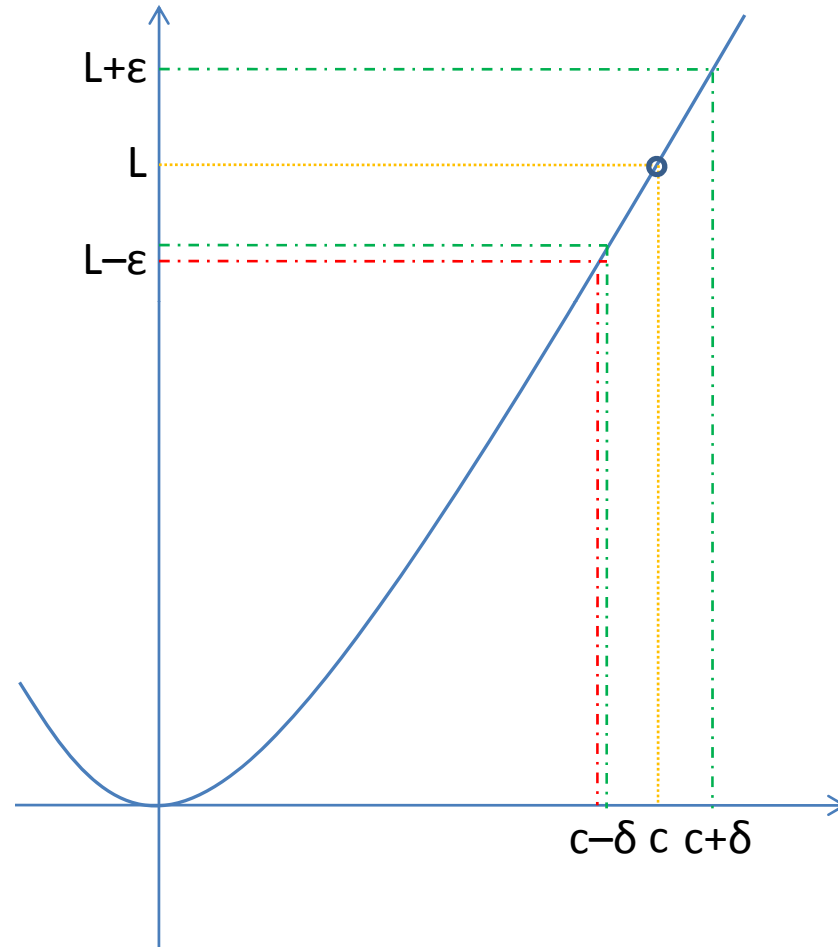
$$|x^2 - 4| < 5|x - 2|.$$

Jadi, jika  $|x - 2| < \varepsilon/5$ , maka  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ .

Dengan demikian ada dua hal yang menjamin  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ , yaitu:  $|x - 2| < 1$  dan  $|x - 2| < \varepsilon/5$ .

Karena itu, kita pilih  $\delta = \min \{ 1, \varepsilon/5 \}$ . Dengan  $\delta$  ini, dapat diperiksa bahwa (\*) benar.

# Ilustrasi Limit



# Sasaran Kuliah Hari Ini

## **1.3 Teorema-Teorema Limit**

Menggunakan teorema-teorema limit dalam penghitungan berbagai limit fungsi aljabar.

## **1.4 Limit Fungsi Trigonometri**

Menghitung berbagai limit fungsi trigonometri.

MA1101 MATEMATIKA 1A

# 1.3 TEOREMA-TEOREMA LIMIT

# Teorema Utama Limit

*Misalkan  $k$  konstanta,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f$  dan  $g$  fungsi yang mempunyai limit di  $c$ .*

$$1. \lim_{x \rightarrow c} k = k.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow c} x = c.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Catatan. **Teorema** merupakan suatu pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya, dan kemudian dapat digunakan sebagai “senjata” kita dlm pemecahan masalah terkait.



# Teorema Utama Limit

$$5. \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow c} f(x) / g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x), \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \text{ asalkan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$$

*untuk n genap.*

Catatan. Teorema berlaku juga untuk **limit sepihak** (limit kanan dan limit kiri).

# Contoh Penggunaan Teorema Limit

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + 5x - 7) &= 2(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + 5 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 7 \\ &= 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 7 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5}}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)} = \frac{\sqrt{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 5}}{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1} \\ &= \frac{\sqrt{2^2 + 5}}{2 + 1} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1. \end{aligned}$$

# Contoh Penggunaan Teorema Limit

3. Diketahui  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 8$ .

Tentukan

$$\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}.$$

Jawab: Menggunakan Teorema 5, 7 dan 8,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)} &= (\lim_{x \rightarrow 1} f(x))^2 \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= 3^2 \cdot \sqrt[3]{8} = 18. \end{aligned}$$

# Teorema Substitusi

*Jika  $f$  adalah fungsi polinom atau fungsi rasional, maka*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

*asalkan  $f(c)$  terdefinisi.*

**Contoh 1.**  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + 5x - 7) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 7 = 0.$

**Contoh 2.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x + 1} = \frac{2^2 + 2}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2.$

# Teorema Apit

*Misalkan  $f$ ,  $g$ , dan  $h$  fungsi yang memenuhi*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

*untuk  $x$  di sekitar  $c$ . Jika*

*Maka* 
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

Catatan. Teorema Apit berlaku pula untuk limit sepihak.

# Contoh Penggunaan Teorema Apit

Untuk  $x > 0$  di dekat 0, berlaku

$$-1 \leq \sin(1/x) \leq 1.$$

Bila kita kalikan ketiga ruas dengan  $x$ , maka

$$-x \leq x \cdot \sin(1/x) \leq x.$$

Karena  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Dengan cara serupa,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$ .

# Latihan

1. Menggunakan teorema limit, hitunglah:

a.  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 4x + \frac{1}{x})$

b.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 + 1}$

Catatan. Sebutkan teorema yang anda pakai.

2. Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$ .

MA1101 MATEMATIKA 1A

# 1.4 LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI



# Limit Fungsi Trigonometri

$$1. \lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$$

$$2. \lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$$

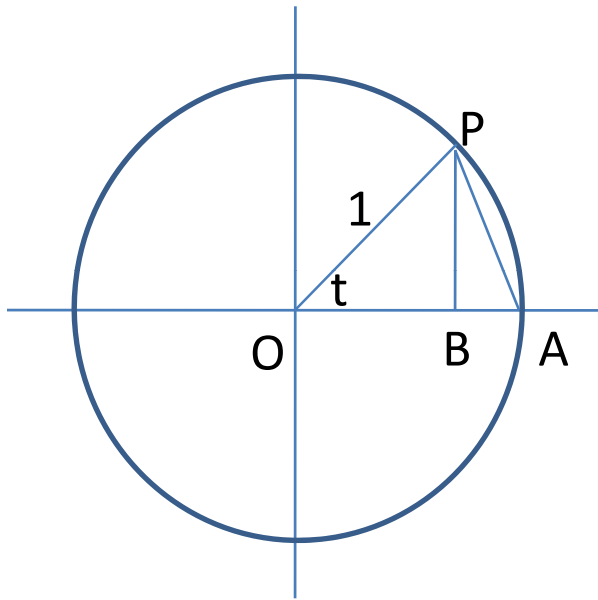
$$3. \lim_{x \rightarrow c} \tan x = \tan c$$

$$4. \lim_{x \rightarrow c} \cot x = \cot c$$

$$5. \lim_{x \rightarrow c} \sec x = \sec c$$

$$6. \lim_{x \rightarrow c} \csc x = \csc c$$

# Bukti bahwa $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$



Untuk  $t > 0$ , berlaku  $0 < |BP| < |AP|$ .

Karena  $|BP| = \sin t$  dan  $|AP| < t$ ,  
maka  $0 < \sin t < t$ .

Dengan Teorema Apit,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sin t = 0.$$

Serupa dengan itu,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \sin t = 0$ .

Jadi  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$ .

Dengan cara serupa, dapat dibuktikan  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1$ .

Bukti bahwa  $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$

Untuk menunjukkan bahwa  $\lim_{t \rightarrow c} \sin t = \sin c$ ,  
misalkan  $k = t - c$  sehingga  $k \rightarrow 0$  ketika  $t \rightarrow c$ .

Jadi

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow c} \sin t &= \lim_{k \rightarrow 0} \sin(c + k) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} (\sin c \cdot \cos k + \cos c \cdot \sin k) \\ &= (\sin c) \cdot 1 + (\cos c) \cdot 0 \\ &= \sin c.\end{aligned}$$

# Limit Trigonometri Khusus

$$1. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad 2. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

Bukti (1) diperoleh dengan menunjukkan bahwa untuk  $t \neq 0$ , berlaku

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{\cos t}.$$

Karena  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1$ , maka dengan Teorema Apit kita simpulkan bahwa  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ .

# Latihan

1. Menggunakan fakta bahwa  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ,  
hitunglah:

a.  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t \cdot \cot 2t$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{2x^2 + x}$

2. Buktikan bahwa  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ .