MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

13 September 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu)

1. Menggunakan fakta bahwa $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,$ hitunglah:

   a. $\lim_{t\to 0}\sin t.\cot 2t$

   b. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+2x)}{2x^2+x}$

2. Buktikan bahwa $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0.$ ← bahas sekarang!

Sasaran Kuliah Hari Ini

1.5 Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

Menghitung limit di tak hingga dan limit tak hingga.

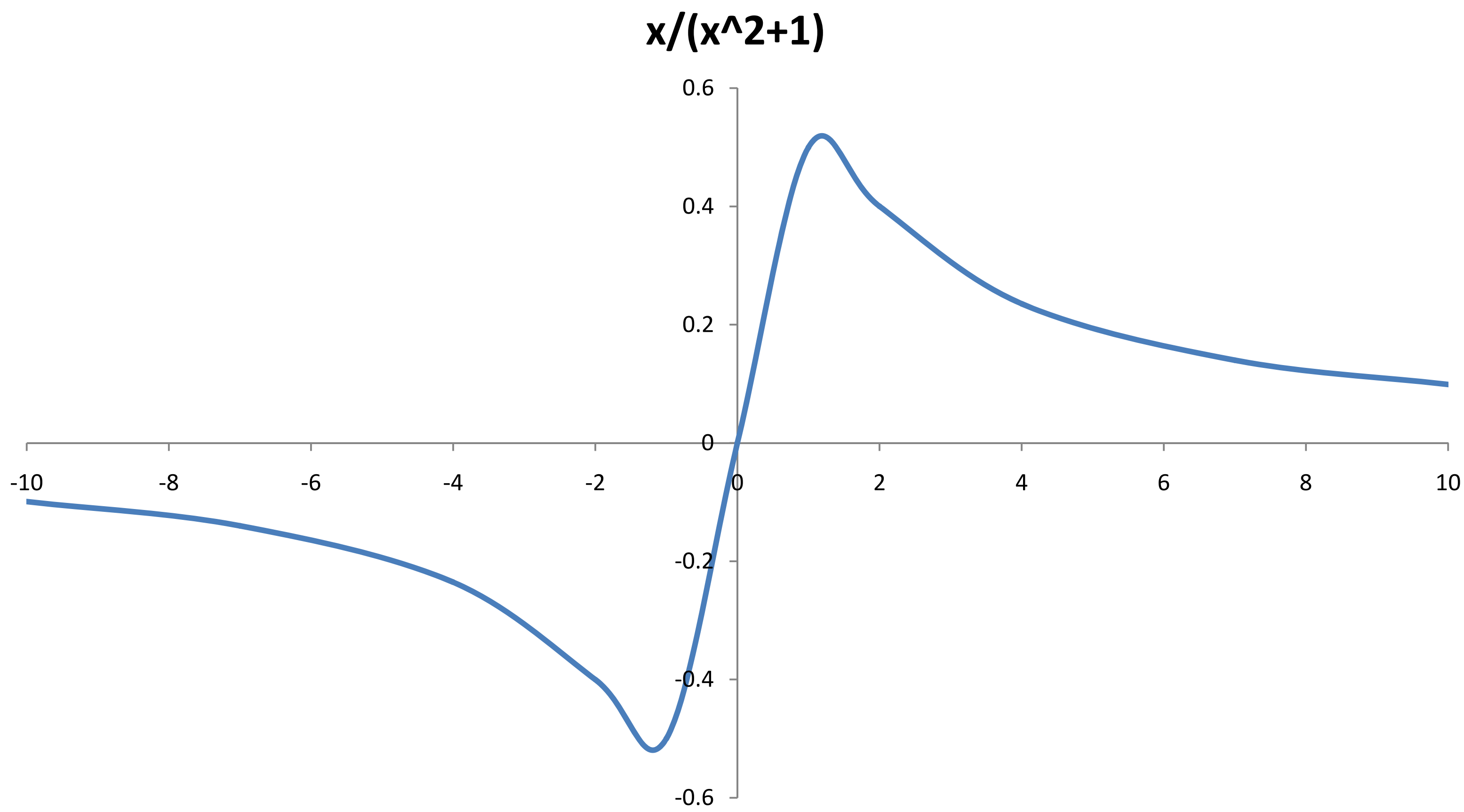
1.6 Kekontinuan

Memeriksa kekontinuan fungsi dan menggunakan Teorema Nilai Antara untuk memecahkan masalah yang relevan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.5 LIMIT DI TAK HINGGA & LIMIT TAK HINGGA

Apa yang Terjadi Bila $x \to \infty$ atau $-\infty$?



Limit di Tak Hingga

Misalkan f terdefinisi pada [c,∞). Kita tuliskan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

apabila untuk setiap ε > 0 terdapat M ϵ **R** sehingga: jika x > M, maka |f(x) – L| < ε.

[Secara intuitif, "limit f di tak hingga" sama dgn L jika untuk x cukup besar, nilai f(x) dekat ke L.]

Contoh 1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$ [jika x > ??, maka |1/x|<ε.]

Contoh 2

Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$

Bukti. Diberikan ε > 0 sembarang, pilih M > 1/ε.
Kita periksa: jika x > M, maka

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} < \varepsilon.$$

Ini membuktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$

Limit di Minus Tak Hingga

Misalkan f terdefinisi pada (-∞,d]. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

apabila untuk setiap ε > 0 terdapat N ε **R** sehingga: jika x < N, maka |f(x) – L| < ε.

[Secara intuitif, "limit f di minus tak hingga" sama dgn L jika utk x minus besar, nilai f(x) dekat ke L.]

Contoh 3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$ [jika x < ??, maka |1/x|<ε.]

Contoh 4

Buktikan bahwa $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$

Bukti. (dikerjakan di papan tulis)

Limit Tak Hingga

Tinjau fungsi $f(x) = 1/x$, dengan $x \neq 0$.

Apa yang terjadi di dekat $x = 0$?

Berapakah nilai limit f di 0, bila ada?

Misalkan f terdefinisi di sekitar $x = c$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$$

apabila untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

jika $0 < x - c < \delta$, maka $f(x) > M$.

Limit Tak Hingga

Misalkan f terdefinisi di sekitar x = c. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$$

apabila untuk setiap M > 0 terdapat δ > 0 sehingga:

jika 0 < c – x < δ, maka f(x) > M.

Catatan: $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ didefinisikan secara analog. [Rumuskan sendiri definisinya, atau lihat buku.]

Contoh

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ [jika 0 < x < ??, maka 1/x > M.]

2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ [jika 0 < -x < ??, maka 1/x < N.]

Latihan

1. Hitunglah:

   a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

   b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x^2+1}$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2. Hitunglah $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{4-x^2}$ dan $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{4-x^2}$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.6 KEKONTINUAN

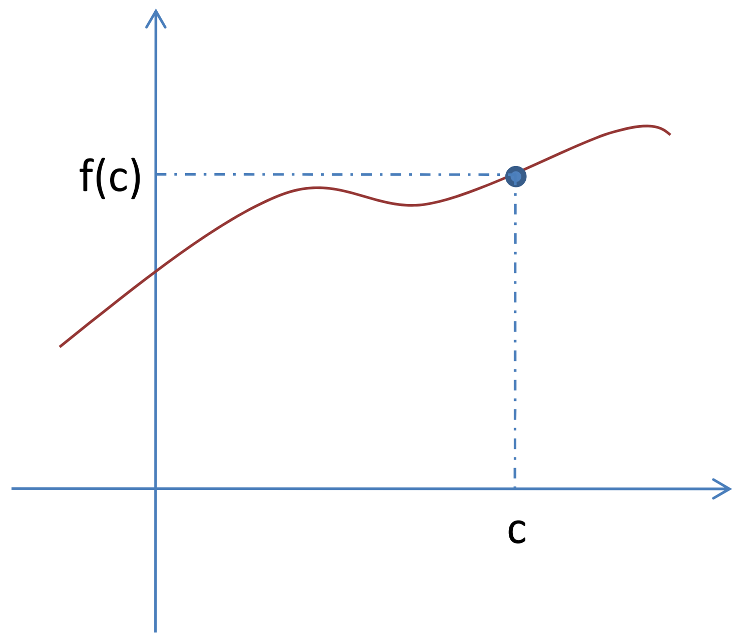
Fungsi Kontinu di Suatu Titik

Misalkan f terdefinisi di sekitar c, termasuk di c.

Fungsi f dikatakan **kontinu di** c apabila

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

yakni untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0 sehingga: jika |x – c|< δ, maka |f(x) – f(c)|< ε.



Fungsi f dikatakan **kontinu pada** (a,b) apabila f kontinu di *setiap* titik c є (a,b).

Keluarga Fungsi Kontinu

1. Fungsi polinom kontinu di setiap titik pada **R**. Demikian pula fungsi rasional kontinu di setiap titik pada daerah asalnya. [Ingat Teorema Substitusi.]
2. Fungsi nilai mutlak $f(x) = |x|$ kontinu pada **R**.
3. Fungsi akar $f(x) = \sqrt{x}$ kontinu pada $(0,\infty)$. Fungsi ini **kontinu kanan** di $c = 0$.
4. Fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ kontinu pada **R**.

Teorema

Jika f dan g kontinu di c dan k konstanta, maka kf, f + g, f – g, fg, f/g, f^n*, dan* $\sqrt[n]{f}$ *kontinu di c.*

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ *dan f kontinu di L, maka* $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L).$

Jika g kontinu di c dan f kontinu di g(c), maka $f \circ g$ *kontinu di c.*

Contoh

1. $f(x) = x \sin x$ kontinu di setiap titik karena merupakan hasilkali dua buah fungsi yang kontinu di setiap titik (pada **R**).
2. $F(x) = |x^2 - 1|$ kontinu di setiap titik (pada **R**) karena $h(x) = x^2 - 1$ kontinu di setiap titik, $g(x) = |x|$ juga kontinu di setiap titik, dan $F(x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$.

Fungsi Kontinu pada Selang Tutup

Fungsi f dikatakan **kontinu pada [a,b]** apabila f kontinu pada (a,b), kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$.

Grafik fungsi f yang kontinu pada selang tutup $[a,b]$ *tidak terputus* dari titik $(a,f(a))$ ke $(b,f(b))$.

Teorema Nilai Antara

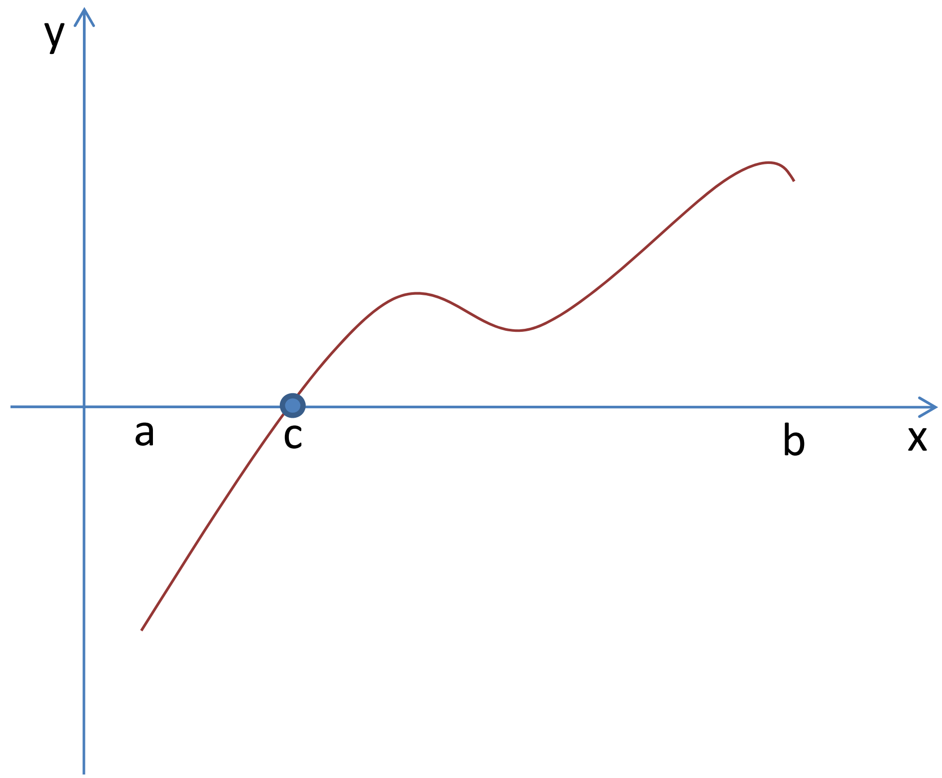
Jika f kontinu pada $[a,b]$*, $f(a) < 0$ dan $f(b) > 0$* (*atau sebaliknya, $f(a) > 0$ dan $f(b) < 0$*)*, maka terdapat $c \in$* (a,b) *sehingga $f(c) = 0$.*

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$, $f(-1) = -1$ dan $f(2) = 5$. Menurut Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in (-1,2)$ sehingga

$$f(c) = c^3 - c^2 + 1 = 0$$

(yakni, f mempunyai **akar** pada [-1,2]).

Ilustrasi TNA



Latihan

1. Tentukan nilai *L* agar *f* kontinu di 1.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1$$
$$= L, \qquad x = 1$$

2. Tentukan *a* dan *b* agar *f* kontinu di setiap titik.

$$f(x) = -1, \qquad x < -1$$
$$= ax + b, -1 \leq x \leq 1$$
$$= 2, \qquad x > 1.$$

3. Buktikan bahwa p(x) = $x^5 - x - 1$ mempunyai akar positif.