

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

20 September 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu)

1. Tentukan turunan $f(x) = \sqrt{x}$ di $a > 0$ sebarang.
2. Tentukan turunan $f(x) = 1/x$ di $a \neq 0$ sebarang.
3. Buktikan bahwa $f(x) = |x|$ tidak mempunyai turunan di 0.

Tambahan: (bahas sekarang!)

4. Diketahui $f(x) = x \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Selidiki apakah f mempunyai turunan di 0.

Sasaran Kuliah Hari Ini

2.3 Aturan Turunan

Menggunakan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi yang merupakan jumlah/selisih atau hasilkali/hasilbagi dua fungsi sederhana.

2.4 Turunan Fungsi Trigonometri

Menentukan turunan fungsi trigonometri.

2.5 Aturan Rantai

Menentukan turunan fungsi yang merupakan komposisi dari dua fungsi sederhana.

MA1101 MATEMATIKA 1A

2.3 ATURAN TURUNAN

Aturan Turunan

3. **Aturan Pangkat:** *Jika $f(x) = x^n$ (n bil. asli), maka $f'(x) = nx^{n-1}$. [sudah dibahas pd kuliah yl.]*

4. **Aturan Kelipatan Konstanta:** $(kf)'(x) = k.f'(x)$.

5. **Aturan Jumlah:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

6. **Aturan Hasilkali:**

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

7. **Aturan Hasilbagi:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Bukti: Aturan HasilKali

Misalkan $F(x) = f(x)g(x)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

Contoh Penggunaan Aturan Turunan

Dengan menggunakan Aturan Turunan (yang sesuai), tentukan turunan fungsi berikut:

1. $f(x) = x(x^2 + 1)$.

2. $g(x) = (5x - 4)/(3x^2 + 1)$.

Jawab:

1. Dengan Aturan Pangkat, Jumlah, dan Hasilkali:

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 + 1) + x(2x) = 3x^2 + 1.$$

2. Dengan Aturan 3, 4, 5 dan 7 (utk Hasilbagi):

$$g'(x) = \frac{5(3x^2 + 1) - (5x - 4)(6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{-15x^2 + 24x + 5}{(3x^2 + 1)^2}.$$

Latihan

1. Dengan menggunakan Aturan Turunan (yang sesuai), tentukan turunan fungsi berikut:
 - a. $f(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$.
 - b. $g(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.
2. Buktikan bahwa turunan dari $f(x) = x^{-n}$ (n bil. bulat positif) adalah $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

2.4 TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Turunan Fungsi Sinus

1. Jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos(h) + \cos x \cdot \sin(h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\sin x \frac{1 - \cos(h)}{h} + \cos x \frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &= (-\sin x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} \right] + (\cos x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \right] \\ &= (-\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

Turunan Fungsi Cosinus

2. Jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$.

$$\begin{aligned}\text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos(h) - \sin x \cdot \sin(h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\cos x \frac{1 - \cos(h)}{h} - \sin x \frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &= (-\cos x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} \right] - (\sin x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \right] \\ &= (-\cos x) \cdot 0 + (-\sin x) \cdot 1 = -\sin x.\end{aligned}$$

Turunan Fungsi Trigonometri Lainnya

Dengan Aturan Hasilbagi, kita peroleh:

3. *Jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$.*

4. *Jika $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = -\csc^2 x$.*

5. *Jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \tan x$.*

6. *Jika $f(x) = \csc x$, maka $f'(x) = -\csc x \cot x$.*

Latihan

1. Buktikan turunan dari $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$.
2. Buktikan turunan dari $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \sec x \tan x$.
3. Tentukan turunan dari:
 - a. $f(x) = \sin^2 x$.
 - b. $g(x) = \sin x \cdot \tan x$.
 - c. $h(x) = x^2 \cos x$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

2.5 ATURAN RANTAI

Turunan Fungsi Komposisi

Bagaimana menghitung turunan dari

$$f(x) = (x^2 + 1)^{10}?$$

Bagaimana pula dengan $g(x) = \sin 4x$?

Perhatikan bahwa kedua fungsi di atas dapat dipandang sebagai hasil **komposisi** dua fungsi yang kita ketahui turunannya.

Aturan Rantai

Jika g mempunyai turunan di x dan f mempunyai turunan di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ mempunyai turunan di x dengan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Contoh:

Diketahui $h(x) = (x^2 + 1)^{10}$. Tentukan $h'(x)$.

Jawab: Misalkan $u = x^2 + 1 = g(x)$ dan $f(u) = u^{10}$.

Maka $h(x) = (f \circ g)(x)$. Di sini $g'(x) = 2x$ dan $f'(u) = 10u^9$. Menurut Aturan Rantai,

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 10[g(x)]^9 \cdot 2x = 20x(x^2 + 1)^9.$$

Latihan

1. Menggunakan Aturan Rantai, tentukan turunan dari:
 - a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
 - b. $g(x) = \sin 4x$.
2. Nyatakan $h(x) = \cos^3 5x$ sebagai hasil komposisi dari *beberapa* fungsi, kemudian tentukan $h'(x)$.

Kuis 1 (30 menit)

1. Selesaikan pertaksamaan $|2x - 3| < |x|$.
2. Diketahui $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$.
 - a. Selidiki apakah f kontinu di 0.
 - b. Selidiki apakah f mempunyai turunan di 0.
3. Tentukan turunan dari $g(x) = 1/(\sin x + \cos x)$.