

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

25 September 2013

Kuis 1 (Kuliah yang Lalu)

1. Selesaikan pertaksamaan $|2x - 3| < |x|$.
2. Diketahui $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$.
 - a. Selidiki apakah f kontinu di 0.
 - b. Selidiki apakah f mempunyai turunan di 0.
3. Tentukan turunan dari $g(x) = 1/(\sin x + \cos x)$.

Jawaban Kuis 1

1. $|2x - 3| < |x|$ setara dengan $(2x - 3)^2 < x^2$ atau $3x^2 - 12x + 9 < 0$ atau $x^2 - 4x + 3 < 0$ atau $(x - 1)(x - 3) < 0$. Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 1 < x < 3\}$.

2. (a) Untuk x di dekat 0 (tidak termasuk $x = 0$) berlaku: $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$. Limit suku di ruas paling kiri dan paling kanan, untuk x menuju 0, sama dengan 0. Jadi, menurut **Teorema Apit**,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Dengan demikian fungsi f *kontinu* di 0.

Jawaban Kuis 1

2. (b) Untuk menyelidiki apakah f mempunyai turunan di 0, kita tentukan apakah limit dari $[f(x) - f(0)]/[x - 0]$, yang sama dengan $f(x)/x = x \sin(1/x)$, untuk x menuju 0, *ada* atau *tidak*.

Untuk x di dekat 0 (tidak termasuk $x = 0$) berlaku: $-x \leq x \sin(1/x) \leq x$. Limit suku di ruas paling kiri dan paling kanan, utk x menuju 0, sama dengan 0. Jadi, menurut **Teorema Apit**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Dengan demikian f *mempunyai turunan* di 0 (dan $f'(0) = 0$).

Jawaban Kuis 1

3. Dengan menggunakan Aturan Hasilbagi, Aturan Jumlah, dan turunan dari fungsi sinus dan cosinus, turunan dari fungsi $g(x) = 1/(\sin x + \cos x)$ adalah
- $$g'(x) = -[\cos x - \sin x]/[\sin x + \cos x]^2.$$

Sasaran Kuliah Hari Ini

2.6 Notasi Leibniz & Turunan Tingkat Tinggi

Menggunakan notasi Leibniz dan menentukan turunan tingkat tinggi dari fungsi yang diberikan, termasuk pola atau rumus umumnya.

2.7 Turunan Implisit

Menentukan turunan fungsi yang diberikan secara implisit.

MA1101 MATEMATIKA 1A

2.6 NOTASI LEIBNIZ & TURUNAN TINGKAT TINGGI

Menggunakan notasi Leibniz dan menentukan turunan tingkat tinggi dari fungsi yang diberikan, termasuk pola atau rumus umumnya.

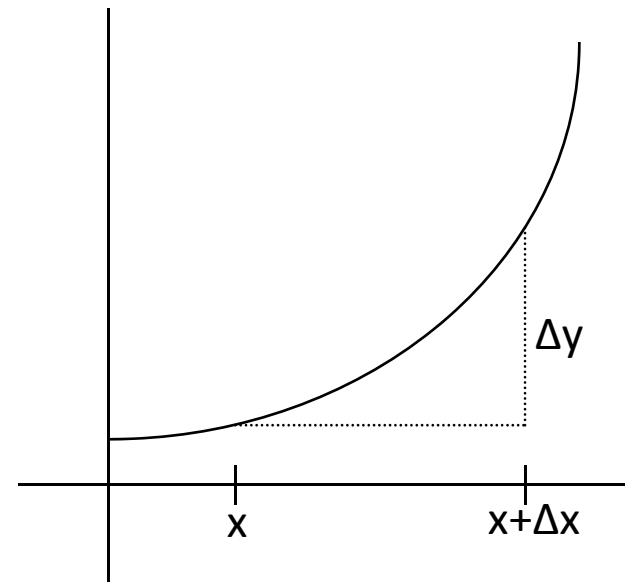
Notasi Leibniz

Pada gambar di samping, tampak bahwa pertambahan sebesar Δx pada x menyebabkan pertambahan sebesar Δy pada y , dengan

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Bagi kedua ruas dengan Δx , kita peroleh

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Notasi Leibniz

Jika $\Delta x \rightarrow 0$, maka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Leibniz menggunakan lambang **dy/dx** untuk menyatakan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Jadi, jika $y = f(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Catatan: Dalam notasi ini, dy/dx merupakan satu kesatuan, **bukan** hasilbagi dy dan dx.

Contoh 1. Jika $y = x^3 + x$, maka $dy/dx = 3x^2 + 1$.

Aturan Rantai dalam Notasi Leibniz

Dengan notasi Leibniz, **Aturan Rantai** berbunyi:

Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Contoh 2. Misalkan $y = (x^3 + x)^{10} = u^{10}$ dengan $u = x^3 + x$. Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot (3x^2 + 1) = 10(x^3 + x)^9 (3x^2 + 1).$$

Turunan Tingkat Tinggi

Diberikan sebuah fungsi f , kita turunkan f' , yang juga merupakan fungsi. Dari f' dapat kita turunkan $f'' = (f')'$, yang disebut **turunan kedua** f , dan dari f'' kita dapat memperoleh **turunan ketiga** f , yakni $f''' = (f'')'$, dst.

Turunan ke-n dari $y = f(x)$ dilambangkan dengan $f^{(n)}$ atau $d^n y/dx^n$.

Contoh 3. Jika $y = \sin 2x$, maka $dy/dx = 2 \cos 2x$,
 $d^2y/dx^2 = -4 \sin 2x$, $d^3y/dx^3 = -8 \cos 2x$, dst.

Dapatkah anda menentukan rumus untuk $d^n y/dx^n$?

Catatan

Bila turunan pertama mempunyai interpretasi fisis **kecepatan sesaat**, maka turunan kedua secara fisis dapat diinterpretasikan sebagai **percepatan (sesaat)** yang mengukur **laju perubahan kecepatan terhadap waktu** (lihat buku teks Purcell & Varberg).

Untuk memahami lebih jauh tentang interpretasi dari turunan, khususnya turunan pertama, kedua, dan ketiga, baca buku teks Purcell & Varberg tentang **model matematika**.

Latihan

1. Diketahui $y = \sin^2(2x)$. Tentukan dy/dx .
2. Tentukan rumus umum turunan ke-n dari $f(x) = 1/x$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

2.7 TURUNAN IMPLISIT

Menentukan turunan fungsi yang diberikan secara implisit.

Turunan Fungsi Implisit

Misalkan kita mempunyai persamaan

$$7y^3 + y = x^3$$

dan ingin menentukan persamaan garis singgung pada grafik persamaan tersebut di $(2,1)$. Masalahnya adalah bagaimana menghitung dy/dx , padahal kita tidak mempunyai rumus eksplisit untuk y dalam x .

Secara implisit, kita dapat menurunkan kedua ruas terhadap x dengan menggunakan Aturan Rantai (dengan mengingat bahwa y adalah fungsi dari x):

$$21y^2 \cdot dy/dx + dy/dx = 3x^2.$$

Dengan demikian kita peroleh

$$dy/dx = (3x^2)/(21y^2+1).$$

Di titik (2,1), kita hitung

$$dy/dx = 12/(21 + 1) = 6/11.$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = 6/11(x - 2)$$

atau

$$6x - 11y - 1 = 0.$$

Aturan Pangkat Rasional

Dengan penurunan implisit, kita dapat membuktikan **Aturan Pangkat Rasional** berikut:

Jika $y = x^r$ ($r \in \mathbf{Q}$), maka $dy/dx = r \cdot x^{r-1}$.

(Buktinya diberikan di papan tulis.)

Latihan

1. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y^5 + 7y = x^3$ di titik $(2,1)$.
2. Diberikan persamaan $x^2 + y^3 = x + 1$, tentukan dy/dx dan d^2y/dx^2 .