

# **MA1101 MATEMATIKA 1A**

**Hendra Gunawan**

Semester I, 2013/2014

27 September 2013

# Sasaran Kuliah Hari Ini

## **2.8 Laju yang Berkaitan**

Menentukan laju dari suatu besaran yang berkaitan dengan besaran lain yang diketahui lajunya.

## **2.9 Diferensial dan Hampiran**

Memahami konsep diferensial dan menggunakannya untuk menentukan nilai hampiran dari suatu fungsi di titik yang diberikan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

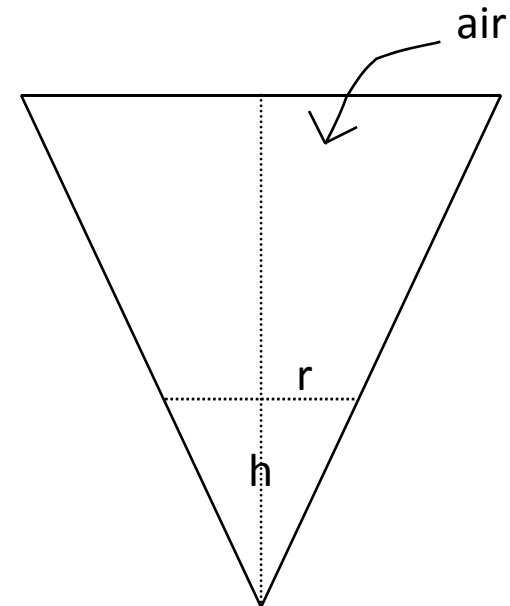
## **2.8 LAJU YANG BERKAITAN**

Menentukan laju dari suatu besaran yang berkaitan dengan besaran lain yang diketahui lajunya.

# Laju yang Berkaitan

Jika  $x$  dan  $y$  merupakan dua peubah yang berkaitan dan masing-masing berubah terhadap waktu ( $t$ ), maka  $dx/dt$  dan  $dy/dt$  merupakan dua **laju yang berkaitan**.

**Contoh:** Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju  $8 \text{ dm}^3/\text{menit}$ . Jika **tinggi** tangki tersebut adalah  $24 \text{ dm}$  dan **jari-jari** permukaannya  $12 \text{ dm}$ , seberapa cepatkah permukaan air naik pada saat tingginya  $4 \text{ dm}$ ?



# Laju yang Berkaitan

Jawab: Misalkan  $V$  menyatakan **volume**,  $r$  **jari-jari permukaan**, dan  $h$  **tinggi air**. Maka

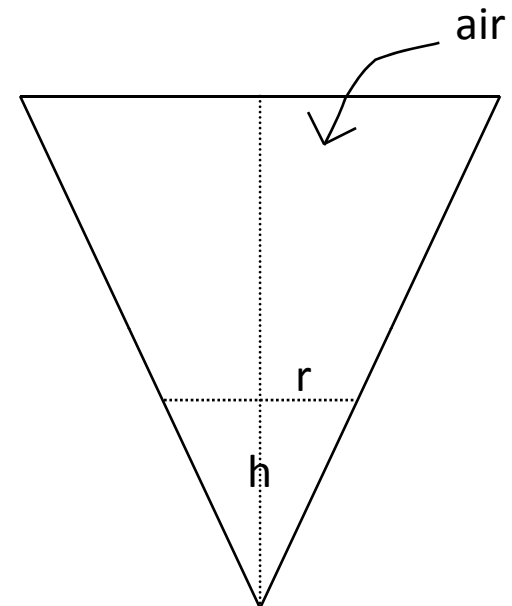
$$V = (\pi/3)r^2h.$$

Di sini  $r = h/2$ , sehingga

$$V = (\pi/12)h^3.$$

Turunkan kedua ruas terhadap  $t$ , kita peroleh

$$dV/dt = (\pi/4)h^2 \cdot dh/dt.$$



# Laju yang Berkaitan

Telah diperoleh:

$$dV/dt = (\pi/4)h^2 \cdot dh/dt.$$

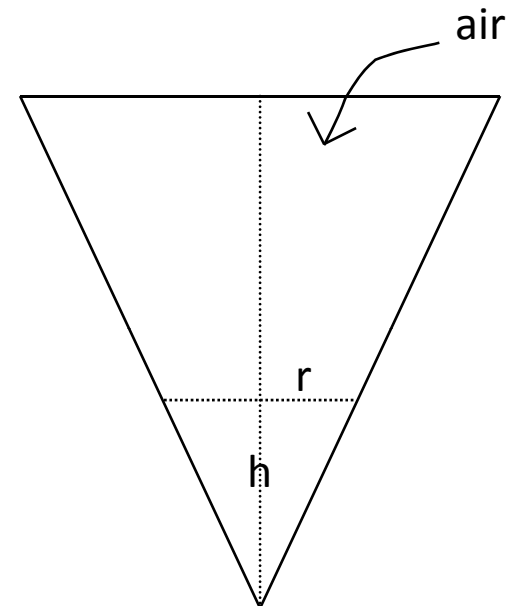
Diketahui  $dV/dt = 8 \text{ dm}^3/\text{menit}$ .

Jadi, pada saat  $h = 4 \text{ dm}$ , kita mempunyai

$$8 = 4\pi \cdot dh/dt$$

sehingga

$$dh/dt = 2/\pi \text{ dm/menit}.$$

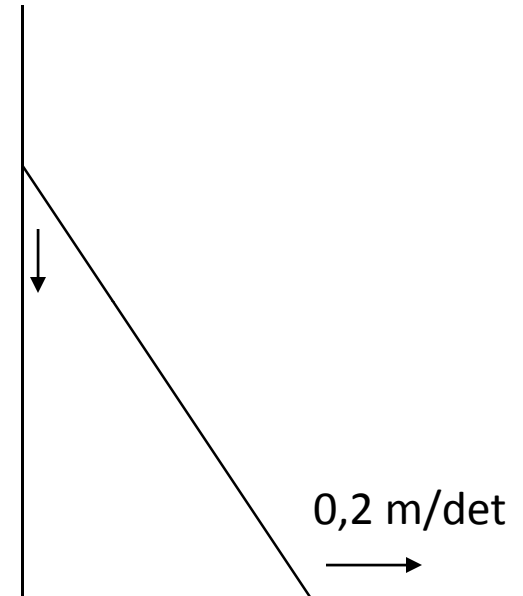


# Latihan

1. Sebuah pesawat terbang ke arah utara dengan laju **800 km/jam**, melintas di atas Alun-Alun pada pukul **12.00**. Sebuah pesawat lain terbang ke arah timur dengan laju **750 km/jam**, melintasi Alun-Alun pada pukul **12.15**. Jika kedua pesawat tersebut terbang pada ketinggian yang sama, seberapa cepat jarak di antara keduanya bertambah pada pukul **13.15**?

# Latihan

2. Sebuah tangga yang panjangnya  $2\text{ m}$  bersandar di dinding. Jika ujung bawah tangga ditarik sepanjang lantai menjauhi dinding dengan laju  $0,2\text{ m/detik}$ , seberapa cepatkah ujung atas tangga bergeser menuruni dinding pada saat ujung bawah tangga berjarak  $0,4\text{ m}$  dari dinding?





MA1101 MATEMATIKA 1A

## **2.9 DIFERENSIAL DAN HAMPIRAN**

Memahami konsep diferensial dan menggunakannya untuk menentukan nilai hampiran dari suatu fungsi di titik yang diberikan.

# Diferensial

Misalkan  $y = f(x)$  mempunyai turunan di  $x$  dan  $dx := \Delta x$  menyatakan **diferensial peubah bebas**  $x$ . Maka, diferensial *peubah tak bebas*  $y$  didefinisikan sebagai

$$dy := f'(x) dx.$$

Berbeda dengan  $dx = \Delta x$ , di sini  $dy$  hanya merupakan *hampiran* untuk  $\Delta y$  [ingat:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ], shg

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x) dx,$$

asalkan  $\Delta x \approx 0$ .

# Diferensial

Pada gambar di samping:

$$dx = \Delta x$$

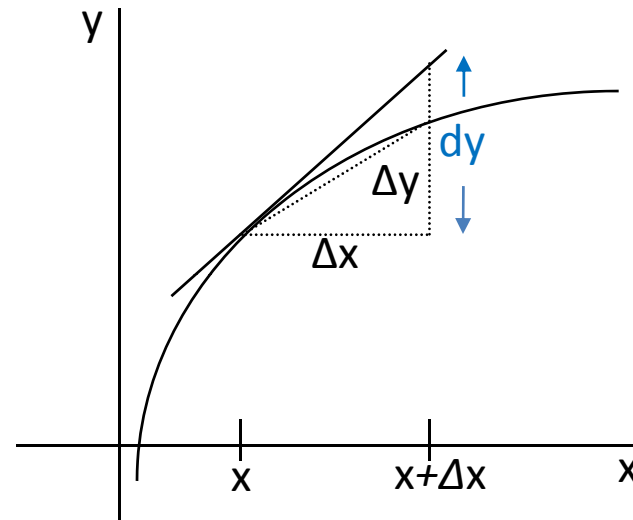
$$dy = f'(x) dx$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

dan bila  $\Delta x \approx 0$ , maka

$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$



# Contoh

Misal kita ingin menghampiri nilai  $\sqrt{4,1}$ .

Tinjau  $y = f(x) = \sqrt{x}$ . Maka  $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ , shg

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + 1/(2\sqrt{x}) \cdot \Delta x.$$

Khususnya, untuk  $x = 4$  dan  $\Delta x = 0,1$ :

$$\sqrt{4,1} \approx \sqrt{4} + 1/(2\sqrt{4}) \cdot (0,1) = 2 + 0,025 = 2,025.$$

# Latihan

1. Dengan menggunakan diferensial, taksirlah nilai  $1/(0,49)$ .
2. Sebuah bola plastik mempunyai diameter  $10\text{ cm}$ . Bila tebal plastik tersebut adalah  $0,2\text{ cm}$ , taksirlah volume udara di dalam bola tersebut dengan menggunakan diferensial. [Gunakan juga taksiran  $\pi \approx 22/7$ .]

# Apa yang Sudah Dipelajari pada Bab 2

2.1 Dua Masalah Satu Tema

2.2 Turunan

2.3 Aturan Turunan

2.4 Turunan Fungsi Trigonometri

2.5 Aturan Rantai

2.6 Notasi Leibniz dan Turunan Tingkat Tinggi

2.7 Turunan Implisit

2.8 Laju yang Berkaitan

2.9 Diferensial dan Hampiran