

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

4 Oktober 2013

Latihan (Kuliah yg Lalu)

1. Tentukan pada selang mana grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ naik atau turun. Tentukan pula pada selang mana ia cekung ke atas atau cekung ke bawah, serta titik belok-nya, bila ada.
2. Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju $8 \text{ dm}^3/\text{menit}$. Jika **tinggi** tangki tersebut adalah 24 dm dan **jari-jari** permukaan atasnya 12 dm , nyatakan tinggi air (h) sebagai fungsi dari waktu (t). Selidiki kemonotonan dan kecekungan grafik fungsi $h(t)$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

3.3 Maksimum dan Minimum Lokal

Menentukan nilai maksimum dan minimum lokal dari suatu fungsi yang diberikan.

3.4 Masalah Maksimum dan Minimum

Memecahkan masalah maksimum dan minimum.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.3 MAKSIMUM DAN MINIMUM LOKAL

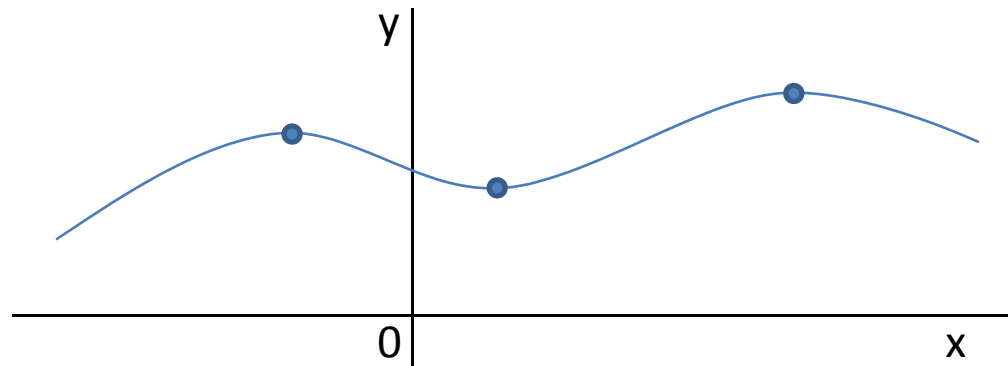
Menentukan nilai maksimum dan minimum lokal dari suatu fungsi yang diberikan.

Maksimum dan Minimum Lokal

Nilai $f(c)$ disebut **nilai maksimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \geq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Nilai $f(c)$ disebut **nilai minimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \leq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

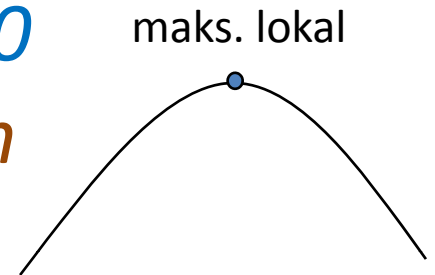
Nilai maksimum/minimum lokal disebut **nilai ekstrim lokal**.



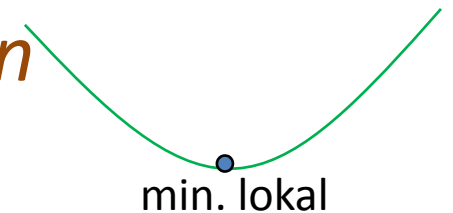
Teorema: Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu di c .

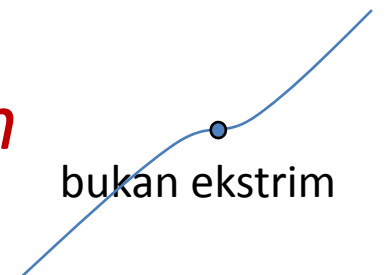
Jika $f'(x) > 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) < 0$ di sekitar kanan c , maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.



Jika $f'(x) < 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) > 0$ di sekitar kanan c , maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

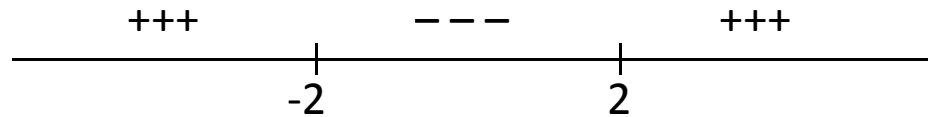


Jika $f'(x)$ bertanda sama di sekitar kiri dan kanan c , maka $f(c)$ bukan merupakan nilai ekstrim lokal.



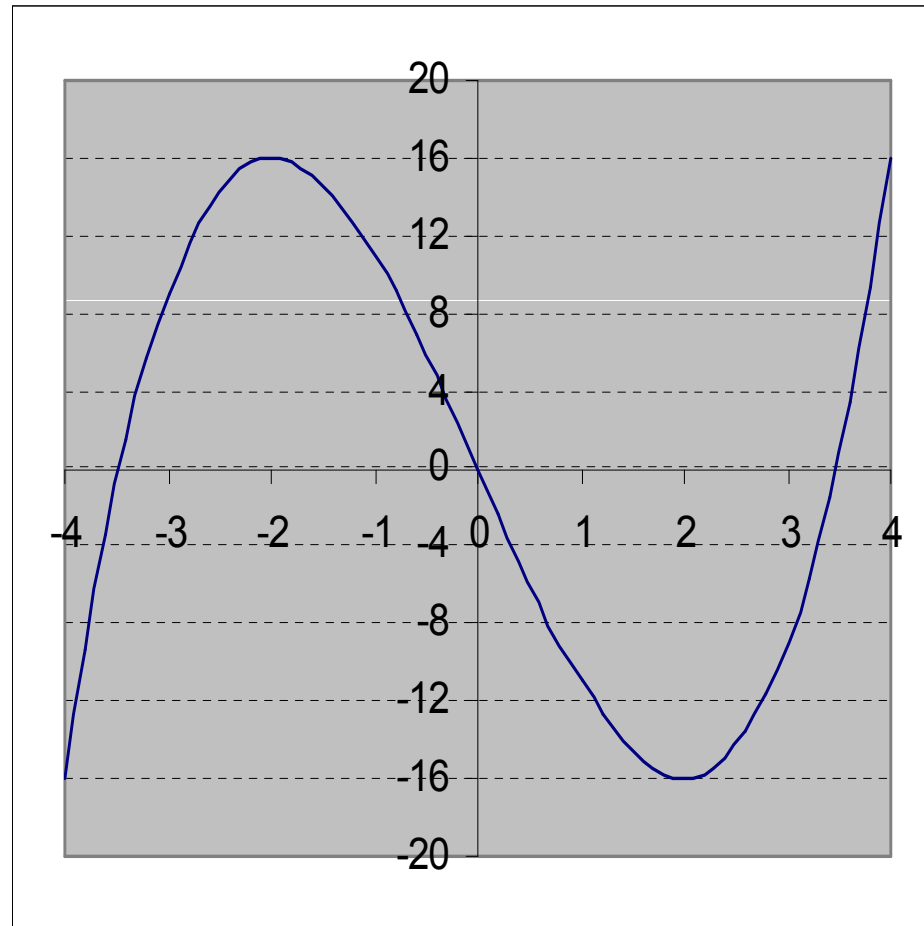
Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$ mempunyai tanda sbb:



Menurut Uji Turunan Pertama, $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal, sesuai dengan yang kita lihat pada grafiknya.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Teorema: Uji Turunan Kedua

Misalkan $f'(c) = 0$ dan f mempunyai turunan kedua pada suatu selang yang memuat c .

Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

Catatan: Dalam hal $f''(c) = 0$, tidak ada kesimpulan apa-apa tentang $f(c)$. Titik $(c, f(c))$ **belum tentu** merupakan titik belok.

Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ di $x = -2$ dan di $x = 2$.

Dengan Uji Turunan Kedua, kita hitung

$f''(x) = 6x < 0$ di $x = -2$; jadi $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Sementara itu, $f''(x) = 6x > 0$ di $x = 2$; jadi $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal.

Catatan: Hasil ini sesuai dengan hasil sebelumnya.

Latihan

Menggunakan Uji Turunan Pertama, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

2. $h(x) = x/2 - \sin x$, $0 < x < 2\pi$.

Menggunakan Uji Turunan Kedua, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

3. $g(x) = x + 1/x$, $x \neq 0$.

4. $F(x) = 64/(\sin x) + 27/(\cos x)$, $0 < x < \pi/2$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.4 MASALAH MAKSIMUM & MINIMUM

Memecahkan masalah maksimum dan minimum.

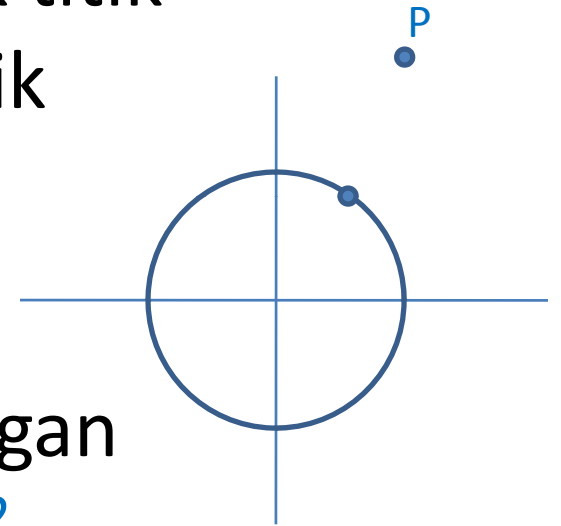
Contoh 1. Tentukan titik pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang terdekat ke titik $P(1,2)$.

Jawab: Misalkan s menyatakan jarak titik (x,y) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ ke titik $P(1,2)$, yakni

$$s = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}.$$

Karena meminimumkan s sama dengan meminimumkan s^2 , kita tinjau $D = s^2$,

$$\begin{aligned} D &= (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &= 6 - 2x - 4\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$



Turunkan D terhadap x , kita peroleh

$$dD/dx = -2 + 4x/\sqrt{1-x^2}.$$

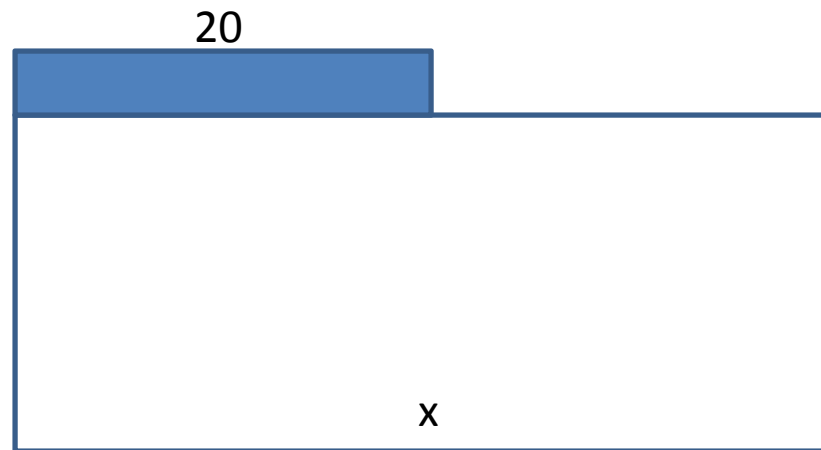
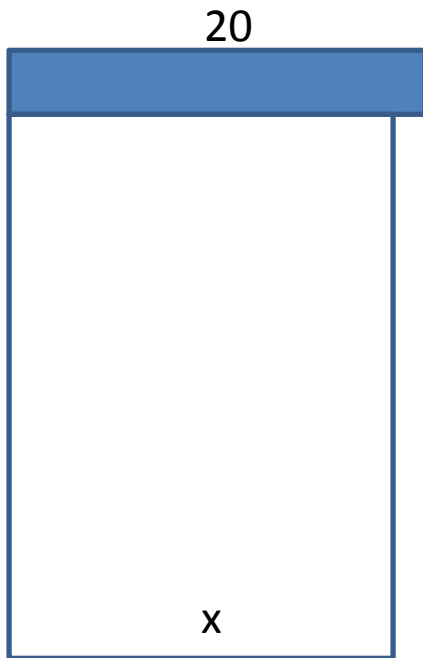
Perhatikan bahwa $dD/dx = 0$ bila $4x = 2\sqrt{1-x^2}$, yaitu apabila $x = 1/\sqrt{5}$. [Kita pilih $x > 0$.]

Dengan memeriksa tanda dD/dx di sekitar $1/\sqrt{5}$,

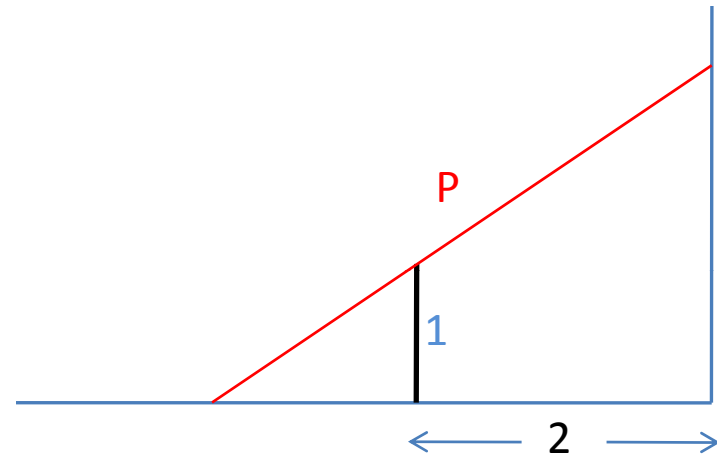


kita simpulkan bahwa D mencapai minimum di $x = 1/\sqrt{5}$. Jadi titik terdekat ke $P(1,2)$ adalah $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Contoh 2. Pak Umar akan memagari kebunnya dengan menggunakan **100 m** pagar dan ia ingin menjadikan sebagian atau seluruh sisi gudang yang panjangnya **20 m** sebagai bagian dari salah satu sisi kebun (lihat gambar). Tentukan luas kebun maksimum yang dapat dipagari.



Contoh 3. Tentukan panjang tangga terpendek yang menghubungkan lantai ke dinding.



Latihan

1. Tentukan titik pada hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ yang terdekat ke titik $Q(5,0)$.
2. Sebuah pulau kecil berjarak 2 km dari titik terdekat P pada garis pantai. Jika seseorang di pulau tersebut dapat mendayung perahunya dengan laju 3 km/jam dan berjalan kaki di pantai 4 km/jam , di mana ia harus berlabuh agar sampai di Q yang berjarak 5 km dari P dalam waktu yang paling singkat?