

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

9 Oktober 2013

Sasaran Kuliah Hari Ini

3.4 Masalah Maksimum dan Minimum – Lanjutan

Memecahkan masalah maksimum dan minimum.

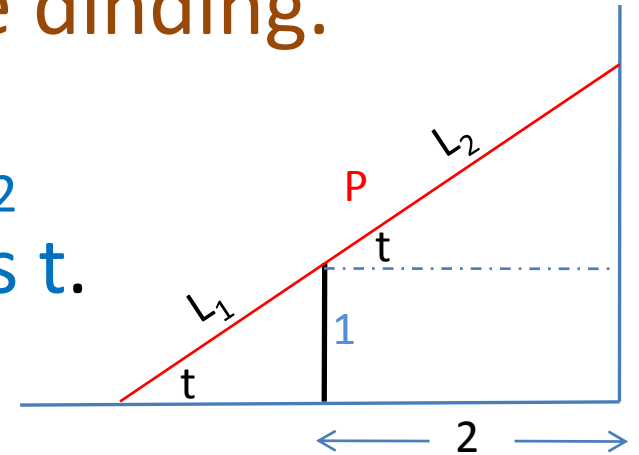
3.5 Menggambar Grafik Fungsi

Menggambar grafik fungsi secara cermat, dengan menggunakan kalkulus.

Soal PR. Tentukan panjang tangga terpendek yang menghubungkan lantai ke dinding.

Jawab: Panjang tangga $P = L_1 + L_2$ dengan $L_1 = 1/\sin t$ dan $L_2 = 2/\cos t$.

Jadi, $P = 1/\sin t + 2/\cos t$.



Turunannya

$$dP/dt = -\cos t/\sin^2 t + 2\sin t/\cos^2 t,$$

sehingga

$$dP/dt = 0 \text{ j.h.j. } \cos t/\sin^2 t = 2\sin t/\cos^2 t$$

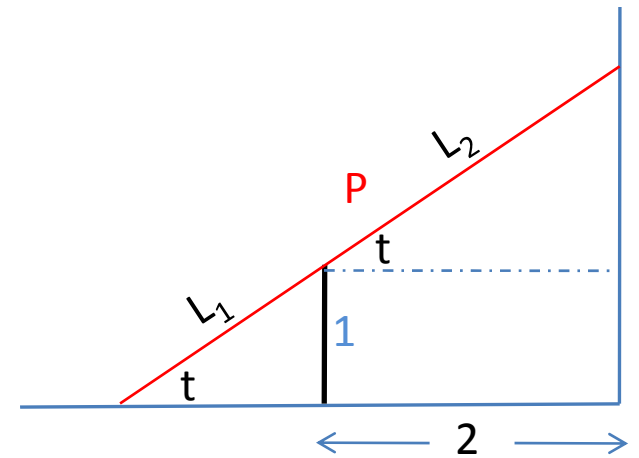
$$\text{atau } \tan^3 t = \frac{1}{2}.$$

Jawab (lanjutan):

Jadi titik stasionernya adalah $t = \arctan 1/\sqrt[3]{2} \approx 0,67$ rad.

Turunan di sebelah kirinya **negatif**, dan di sebelah kanannya **positif**. Jadi, titik tersebut adalah **titik minimum**.

Dengan demikian panjang tangga **terpendek** adalah $P \approx 1/\sin 0,67 + 2/\cos 0,67 \approx 4,16$ meter.



Latihan

1. Tentukan titik pada hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ yang **terdekat** ke titik **Q(5,0)**.
2. Sebuah pulau kecil berjarak **2 km** dari titik terdekat **P** pada garis pantai. Jika seseorang di pulau tersebut dapat mendayung perahunya dengan laju **3 km/jam** dan berjalan kaki di pantai **4 km/jam**, di mana ia harus berlabuh agar sampai di **Q** yang berjarak **5 km** dari **P** dalam waktu yang **paling singkat**?

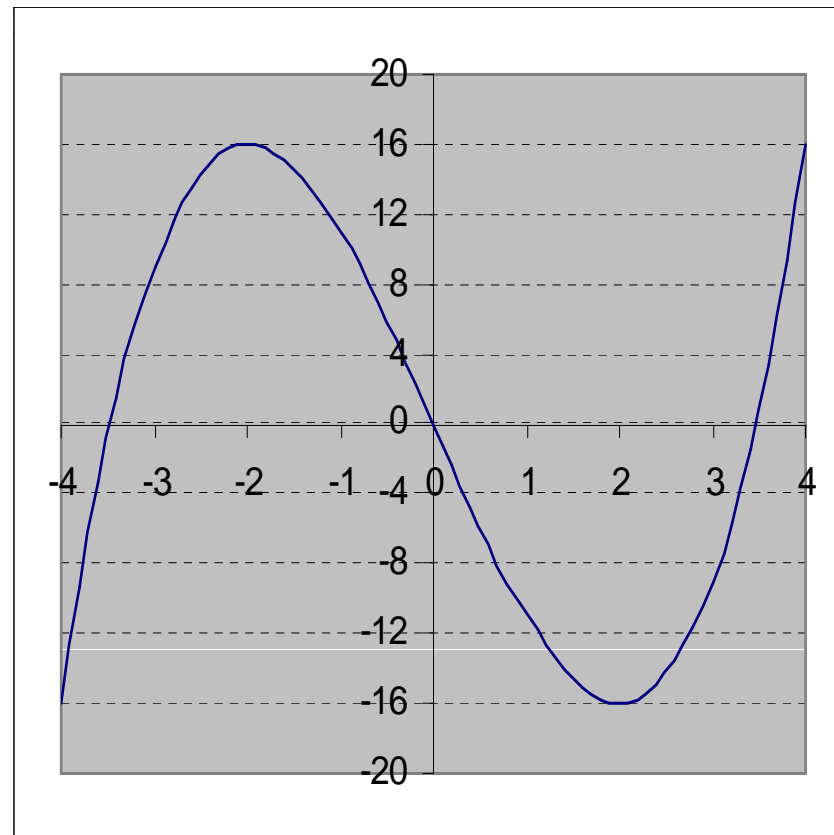
MA1101 MATEMATIKA 1A

3.5 MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI

Menggambar grafik fungsi secara cermat,
dengan menggunakan kalkulus.

Menggambar Grafik Fungsi

Kita telah melihat bagaimana informasi tentang kemonotonan dan kecekungan dapat dipakai untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Berikut adalah sebuah contoh lainnya:

Contoh 1

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 5)^2$, dengan memperhatikan:

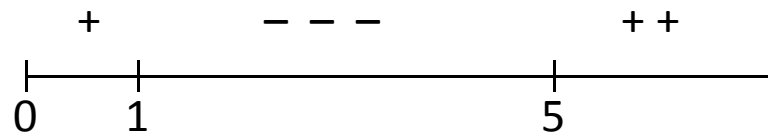
- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot datar dan asimtot tegak (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada).

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 5)^2$

Daerah asal f adalah $[0, \infty)$ dan daerah hasilnya juga $[0, \infty)$, sehingga grafiknya akan terletak di kuadran pertama. Titik potong dengan sumbu x adalah $x = 0$ dan $x = 5$, sedangkan titik potong dengan sumbu y adalah $y = 0$. Asimtot tidak ada. Untuk $x > 0$, turunan pertama f adalah

$$f'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{2\sqrt{x}}.$$

Jadi, titik-titik stasionernya adalah $x = 1$ dan $x = 5$, dan tanda $f'(x)$ adalah



Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 5)^2$

Jadi f **naik** pada $[0,1)$, **turun** pada $[1,5]$, dan **naik** pada $(5,\infty)$. Menurut Uji Turunan Pertama, $f(1) = 16$ merupakan **nilai maksimum lokal**, sedangkan $f(0) = f(5) = 0$ merupakan **nilai minimum lokal** (sekaligus **global**).

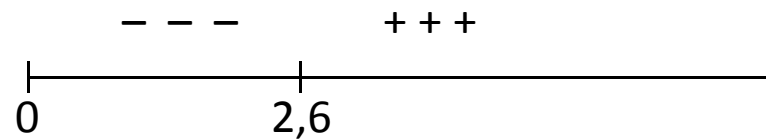
Selanjutnya kita hitung turunan keduanya:

$$f''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{4x^{3/2}}.$$

Menggunakan rumus akar persamaan kuadrat, kita dapatkan $f''(x) = 0$ ketika $x = 1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2,6$.

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 5)^2$

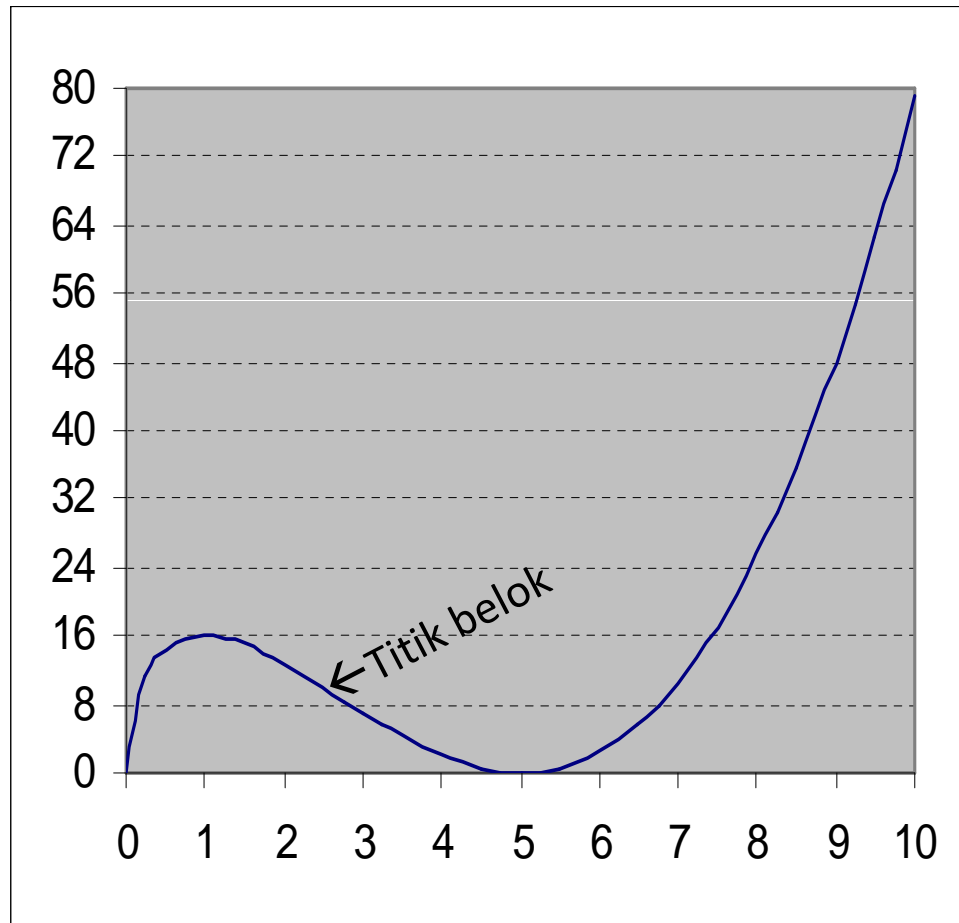
Periksa tanda $f''(x)$:



Jadi grafiknya **cekung ke bawah** di sebelah kiri **2,6**; dan **cekung ke atas** di sebelah kanan **2,6**.
Jadi **$(2,6 ; f(2,6))$** merupakan **titik belok**.

Dengan semua informasi ini, kita dapat menggambar grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 5)^2$ sebagai berikut:

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 5)^2$



Contoh 2

Gambarlah grafik fungsi

$$\begin{aligned} g(x) &= 50x - x^2/2, & \text{jika } 0 \leq x \leq 20, \\ &= 60x - x^2, & \text{jika } 20 < x \leq 60, \end{aligned}$$

dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot datar dan asimtot tegak (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada).

Latihan

Dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
 - titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
 - asimtot (bila ada),
 - kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
 - kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada),
- gambarlah grafik fungsi berikut:

1. $f(x) = x + 1/x$

2. $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

Catatan

Dalam menggambar grafik fungsi, informasi tentang apakah fungsi tersebut merupakan fungsi **genap** atau **ganjil** juga merupakan informasi penting yang membantu kita.

Sebagai contoh, fungsi pada soal latihan no. 1 merupakan fungsi ganjil; jadi grafiknya **simetris** terhadap **titik asal**.