MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

11 Oktober 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu)

Dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada),

gambarlah grafik fungsi berikut:

1. $f(x) = x + 1/x$ (sudah dikerjakan)
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$. ← bahas sekarang!

Sasaran Kuliah Hari Ini

3.6 Teorema Nilai Rata-Rata

Menentukan nilai rata-rata dari suatu fungsi yang diberikan; menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata untuk memecahkan masalah yang relevan.

3.7 Menyelesaikan Persamaan Secara Numerik

Menggunakan Metode Bagi Dua untuk mencari akar suatu persamaan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.6 TEOREMA NILAI RATA-RATA

Menentukan nilai rata-rata dari suatu fungsi yang diberikan; menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata untuk memecahkan masalah yang relevan.

Jangan Berbohong, Nanti Ketahuan!

Pak Djono mengatakan bahwa dengan mobil baru yang dikendarainya ia telah menempuh 112 km dalam 2 jam tanpa pernah melampaui 55 km/jam.

Ah, ia telah *berbohong!* Tetapi bagaimana kita dapat membuktikannya?

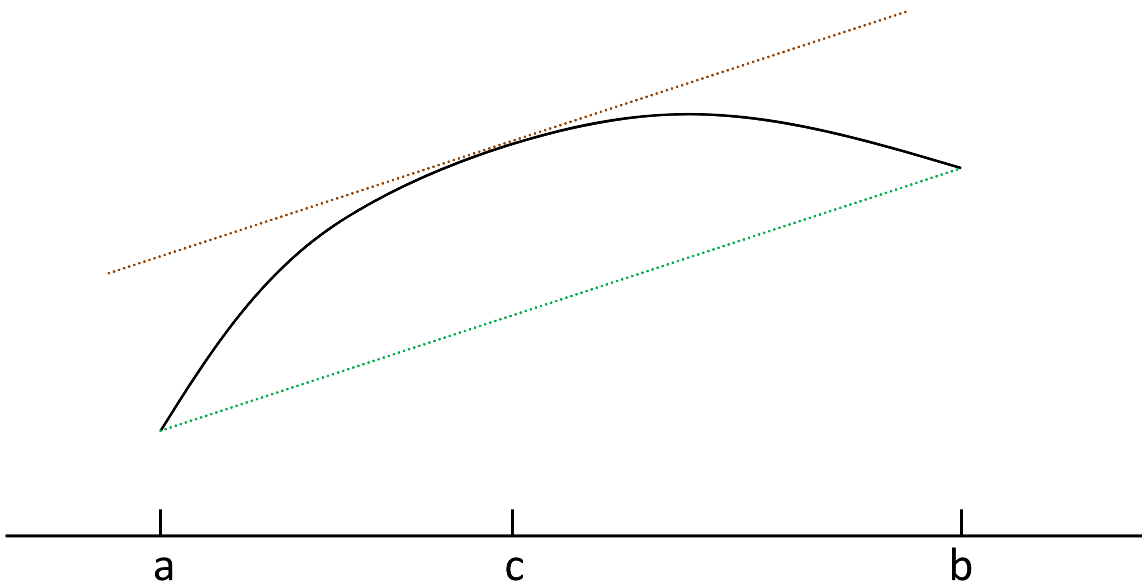
Teorema Nilai Rata-Rata

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan mempunyai turunan pada (a,b), maka terdapat suatu $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

<u>Catatan</u>. $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ disebut **nilai rata-rata** f pada $[a,b]$. Secara fisis, bayangkan **kecepatan rata-rata** pada suatu selang waktu!

Ilustrasi: Teorema Nilai Rata-Rata



f’(c) = gradien garis singgung di c,
[f(b) – f(a)]/(b – a) = gradien ruas garis yang menghubungkan (a,f(a)) dan (b,f(b)).

Kebohongan Pak Djono

Untuk membuktikan bahwa Pak Djono bohong, misalkan $f(t)$ menyatakan jarak yang ditempuh dalam t jam. Maka f kontinu dan turunannya, $f'(t)$, menyatakan kecepatan pada saat t. Menurut Teorema Nilai Rata-rata, mestilah terdapat $t_1 \in (0,2)$ sedemikian sehingga

$$f'(t_1) = [f(2) - f(0)]/(2 - 0) = 56.$$

Ini berarti bahwa Pak Djono pernah memacu mobilnya dengan kecepatan di atas 55 km/jam.

Contoh 1

Diketahui $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Hitung nilai rata-rata f pada $[0,1]$ dan tentukan $c \in (0,1)$ sedemikian sehingga $f'(c)$ sama dengan nilai rata-rata f pada $[0,1]$.

<u>Jawab</u>: Nilai rata-rata f pada $[0,1]$ adalah

$$[f(1) - f(0)]/(1 - 0) = 1.$$

Sementara itu $f'(x) = 2x = 1$ jika dan hanya jika $x = ½$. Jadi, $c = ½$ adalah bilangan yang kita cari.

Contoh 2

Buktikan ketaksamaan

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

untuk setiap $x, y \in \mathbf{R}$.

Latihan

1. Diketahui $g(x) = x^3/3$, $x \in [-2,2]$. Hitung nilai rata-rata g pada $[-2,2]$ dan tentukan $c \in (-2,2)$ sedemikian sehingga $g'(c)$ sama dengan nilai rata-rata g pada $[-2,2]$.
2. Buktikan jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $f(x)$ bernilai konstan pada selang (a,b).

WAWASAN

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.7 MENYELESAIKAN PERSAMAAN SECARA NUMERIK

Menggunakan Metode Bagi Dua untuk mencari akar suatu persamaan.

Tidak semua persamaan dapat diselesaikan secara eksak

Misalkan $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, \ 0 \le x \le 1$.
Menurut Teorema Nilai Rata-Rata, ada $c \in (0,1)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = f(1) - f(0),$$

yakni

$$4c^3 + 2c + 1 = 3$$

atau

$$2c^3 + c - 1 = 0.$$

Berapa nilai c tersebut? Bukan hal yang mudah mencarinya! *Ada, tapi entah berapa* :(

Menyelesaikan persamaan secara numerik

Persamaan $2c^3 + c - 1 = 0$ dapat diselesaikan secara numerik, misalnya dengan Metode Bagi Dua, sebagai berikut:

Misalkan $p(x) = 2x^3 + x - 1, 0 \le x \le 1$. Ingin didapakan nilai $c \in (0,1)$ sehingga $p(c) = 0$.

Periksa bahwa $p(0) = -1$ dan $p(1) = 2$. Jadi, $p(0)$ dan $p(1)$ berbeda tanda. Karena p kontinu, menurut Teorema Nilai Antara terdapat $c \in (0,1)$ sehingga $p(c) = 0$. Bilangan c tak lain adalah **akar** polinom p.

Menyelesaikan persamaan secara numerik

Sekarang kita akan menentukan, apakah akar tsb ada di $[0,½]$ atau $[½,1]$. Dengan menghitung nilai p di $x = ½$: $p(½) = -¼ < 0$, kita simpulkan bahwa akar tsb berada di $[½,1]$.

Selanjutnya kita **bagi dua** *lagi* selang $[½,1]$. Kita hitung nilai p di $x = ¾$: $p(¾) = 19/32 > 0$. Jadi, akar tsb berada di $[½,¾]$.

Bila langkah ini kita lanjutkan, maka kita dapatkan tabel berikut:

Tabel Nilai p

x	2x^3+x-1
0	-1
1	2
0.5	-0.25
0.75	0.59375
0.625	0.1132813
0.5625	-0.081543
0.59375	0.0123901
0.578125	-0.035423
0.5859375	-0.011731

Perhatikan bahwa pada se-tiap langkah kita memeriksa nilai $p(x)$ di **titik tengah**; dan selanjutnya kita putuskan akar p ada di mana, menggunakan Teorema Nilai Antara. Sebagai contoh, pada langkah ke-3, nilai $p(0.625) > 0$, sedangkan $p(0.5) < 0$ dan $p(0.75) > 0$. Jadi akar ada diantara $x = 0.5$ dan $x = 0.625$.

Taksiran Akar dan Kesalahannya

Bila kita **taksir** akar p dengan titik tengah $x = 0.5$, maka **kesalahan**nya sama dengan 0.5. [Akar sesungguhnya ada dalam selang $[0.5–0.5 , 0.5+0.5]$ alias selang $[0,1]$.]

Pada langkah **kedua**, kita tahu bahwa akar ada dalam selang $[0.5,1]$. Bila kita taksir akar p dengan titik tengah $x = 0.75$, maka kesalahannya sama dengan 0.25.

Pada langkah **ketiga**, kita taksir akar p dengan titik tengah $x = 0.625$, dengan kesalahan 0.125.

Taksiran Akar dan Kesalahannya

n	x	2x^3+x-1	error*
0	0	-1	1
0	1	2	1
1	0.5	-0.25	0.5
2	0.75	0.59375	0.25
3	0.625	0.1132813	0.125
4	0.5625	-0.081543	0.0625
5	0.59375	0.0123901	0.03125
6	0.578125	-0.035423	0.015625
7	0.5859375	-0.011731	0.007813

Error* terjadi bila x dipakai sebagai taksiran akar p. Sbg contoh, jika kita taksir akar p dengan x = 0.5859375, maka kesalahannya adalah 0.007813.

Catatan

Selain Metode Bagi Dua, ada beberapa metode lainnya untuk mencari akar persamaan secara numerik. Yang cukup terkenal adalah **Metode Newton**, yang melibatkan konsep **turunan**.

Metode ini lebih ampuh daripada Metode Bagi Dua, tetapi *sedikit* lebih repot dalam perhitungannya (lihat buku Purcell & Varberg).

Latihan

Gunakan Metode Bagi Dua untuk menaksir akar persamaan $x^3 + 2x - 6 = 0$ yang terdapat dalam selang $[1,2]$, beserta kesalahannya. Cek terlebih dahulu apakah betul ada akar dalam selang tersebut! Setelah itu, terapkan Metode Bagi Dua hingga diperoleh kesalahan < 0.01.