MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

16 Oktober 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu)

1. Diketahui $g(x) = x^3/3$, $x \in [-2,2]$. Hitung nilai rata-rata g pada $[-2,2]$ dan tentukan $c \in (-2,2)$ sedemikian sehingga $g'(c)$ sama dengan nilai rata-rata g pada $[-2,2]$.
2. Buktikan jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $f(x)$ bernilai konstan pada selang (a,b).

Sasaran Kuliah Hari Ini

3.8 Anti-Turunan dan Integral Tak Tentu

Menentukan anti-turunan atau integral tak tentu dari suatu fungsi yang diberikan.

3.9 Pengantar Persamaan Diferensial

Menyelesaikan persamaan diferensial sederhana, dengan atau tanpa syarat tambahan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.8 ANTI-TURUNAN DAN INTEGRAL TAK TENTU

Menentukan anti-turunan atau integral tak tentu dari suatu fungsi yang diberikan.

Anti-Turunan

Fungsi F disebut **anti-turunan** f pada I apabila

$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap $x \in I$.

Sebagai contoh, $F_1(x) = x^4 + 1$ merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada $\mathbf{R}$. Demikian juga $F_2(x) = x^4 + 5$ merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada $\mathbf{R}$.

Secara umum, *keluarga fungsi* $F(x) = x^4 + C$ (dengan C konstanta) merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada $\mathbf{R}$, karena $F'(x) = 4x^3 = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Integral Tak Tentu

Keluarga fungsi anti-turunan dari $f(x)$ disebut **integral tak tentu** dari $f(x)$, dan dilambangkan dengan $\int f(x)\,dx$.

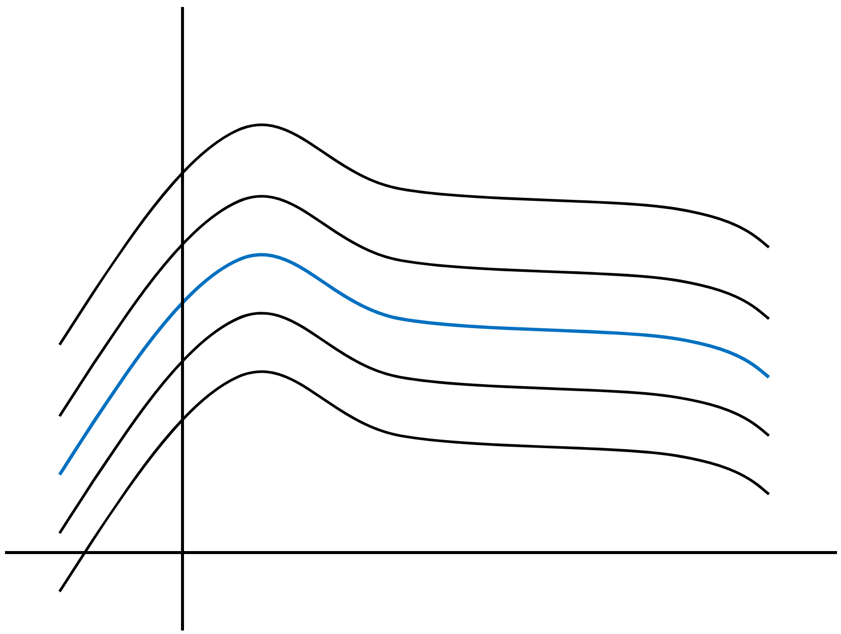
Jadi, sebagai contoh,

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + C,$$

dengan C menyatakan konstanta sembarang.

Ilustrasi: Integral Tak Tentu

Secara grafik, bila kita mengetahui sebuah anti-turunan dari $f(x)$, maka integral tak tentu dari $f(x)$ adalah keluarga fungsi yang anggotanya merupakan *pergeseran ke atas* atau *ke bawah* dari anti-turunan tsb. Semua anggota keluarga fungsi tsb mempunyai turunan yang sama, yaitu $f(x)$.



Keluarga fungsi yang turunan-nya sama

Aturan Integral Tak Tentu (1)

Terkait dengan aturan turunan yang telah kita pelajari sebelumnya, kita mempunyai teorema-teorema berikut tentang integral tak tentu.

Teorema 1 (**Aturan Pangkat**). Jika $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq -1$, maka $\int x^r \, dx = x^{r+1}/(r+1) + C$.

Contoh 1

(a) $\int x^2 \, dx = x^3/3 + C$. (b) $\int x^{-2} \, dx = -\, x^{-1} + C$.

Aturan Integral Tak Tentu (2)

Teorema 2 (Integral Tak Tentu sin x dan cos x)

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Catatan. Jangan tertukar: turunan dari $\sin x$ adalah $\cos x$, sedangkan anti-turunan dari $\sin x$ adalah $-\cos x + C$.

Aturan Integral Tak Tentu (3)

Teorema 3 (Kelinearan Integral Tak Tentu)

Jika f dan g fungsi dan k adalah konstanta, maka

$$\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx$$

dan

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Contoh 3. $\int (6x^2 + \sin x)\,dx = 2\int 3x^2\,dx + \int \sin x\,dx$
$= 2x^3 - \cos x + C.$

Aturan Integral Tak Tentu (4)

Teorema 4 (**Aturan Pangkat yang Diperumum**)
Jika $r \in \mathbf{Q}$*,* $r \neq -1$ *dan g adalah fungsi yang mem-punyai turunan, maka*

$$\int [g(x)]^r . g'(x)\,dx = [g(x)]^{r+1}/(r+1) + C.$$

Bukti. Dengan Aturan Rantai, turunan fungsi di ruas kanan adalah $[g(x)]^r . g'(x)$. Terbukti.

Contoh 4. Tentukan $\int (x^2 + 1)^5 . 2x\,dx$.

Misal $u = g(x) = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$. Maka

$\int (x^2 + 1)^5 . 2x\,dx = \int u^5\,du = u^6/6 + C = (x^2 + 1)^6/6 + C$.

Contoh 5. Jika $g(x) = \sin x$, maka $g'(x) = \cos x$. Jadi, menurut Aturan Pangkat yang Diperumum, kita peroleh

$$\begin{aligned} \int \sin x.\cos x \, dx &= \int g(x)\, g'(x)\, dx \\ &= [g(x)]^2/2 + C \\ &= (\sin x)^2/2 + C. \end{aligned}$$

Latihan

Tentukan integral tak tentu di bawah ini.

1. $\int (x^2 + x^{-2})\, dx$.

2. $\int (x^3 + 1).x^2\, dx$.

3. $\int \sin^2 x.\sin 2x\, dx$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.9 PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

Menyelesaikan persamaan diferensial seder-hana, dengan atau tanpa syarat tambahan.

Persamaan Diferensial

Jika $F'(x) = f(x)$, maka $\int f(x)\, dx = F(x) + C$. Dalam bahasa diferensial: Jika $F'(x) = f(x)$, maka

(*) $$dF(x) = F'(x)\, dx = f(x)\, dx$$

sehingga

$$\int dF(x) = \int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Persamaan (*) merupakan contoh **persamaan diferensial** yang (paling) sederhana.

Persamaan diferensial banyak dijumpai dalam matematika, fisika, dan bidang ilmu lainnya.

Contoh 1

Tentukan persamaan kurva yang melalui titik $(1,2)$ dan mempunyai turunan $2x$ di setiap titik (x,y) yang dilaluinya.

Jawab. Misalkan persamaan kurva tersebut adalah $y = f(x)$. Maka, dalam bahasa diferensial, informasi di atas mengatakan bahwa

$$dy = 2x\, dx.$$

Integralkan kedua ruas,

$$\int dy = \int 2x\, dx.$$

sehingga kita peroleh

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

atau $y = x^2 + C$, dengan $C = C_2 - C_1$.

Persamaan $y = x^2 + C$ menyatakan keluarga kurva yang mempunyai turunan $2x$ di titik (x,y).

Sekarang kita akan mencari anggota keluarga kurva tersebut yang melalui titik $(1,2)$.

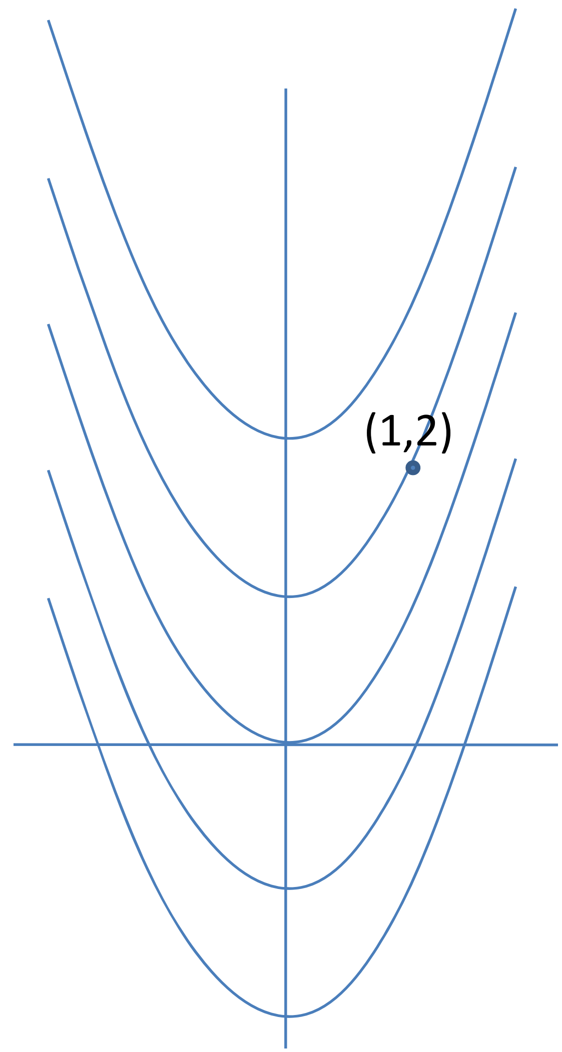
Dalam hal ini kita mempunyai persamaan

$$2 = 1^2 + C,$$

sehingga mestilah $C = 1$.

Jadi persamaan kurva yang kita cari adalah

$$y = x^2 + 1.$$



Contoh 2

Sebuah benda jatuh dari ketinggian 100 m dengan kecepatan awal 0 m/s. Karena gravitasi, benda tsb mengalami percepatan $-9{,}8$ m/s^2. Tentukan ketinggian benda tsb pada saat t.

Jawab. Misal $v = v(t)$ = kecepatan benda dan $h = h(t)$ = ketinggian benda pada saat t. Maka

$dv = -9{,}8\ dt$, sehingga $v = -9{,}8t + C$. Karena $v(0) = 0$, maka $C = 0$. Selanjutnya $dh = -9{,}8t\ dt$, sehingga

$$h = -4{,}9t^2 + D.$$

Diketahui $h(0) = 100$, maka $D = 100$. Jadi

$$h = 100 – 4{,}9t^2.$$

Catatan

Persamaan ketinggian $h = 100 - 4{,}9t^2$ tentu saja berlaku ketika benda ber-ada di atas permukaan tanah. Karena itu daerah asal fungsi ini adalah himpunan bilangan $t \geq 0$ yang membuat $h \geq 0$, yaitu $0 \leq t \leq \surd 4{,}517$. Dalam hal ini, benda tsb mencapai permukaan tanah dalam $\surd 4{,}517$ detik.

Contoh 3:
Kecepatan Meninggalkan Bumi

Gaya **gravitasi** Bumi pada benda bermassa m dan berjarak s dari pusat Bumi adalah $F = -mgR^2/s^2$, dengan $g = 9{,}8\ m/s^2$ dan $R \approx 6.400$ km. Dapat dibuktikan bahwa benda yang diluncurkan ke atas dengan kecepatan awal $v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 11$ km/s takkan jatuh kembali ke Bumi (bila gesekan dengan udara diabaikan). Menurut **Hukum II Newton**, $F = m.a$, shg

$$F = m.dv/dt = m.dv/ds.ds/dt = mv.dv/ds.$$

Akibatnya, $v.dv = -mgR^2s^{-2}.ds$, dan dari sini diperoleh

$$v^2 = 2gR^2s^{-1} + v_0^2 - 2gR.$$

Untuk s besar, suku pertama di ruas kanan dapat diabaikan. Jadi, v akan tetap positif bila $v_0 \geq \sqrt{2gR}$.

Latihan

1. Tentukan fungsi $y = f(x)$ sedemikian sehingga $f'(x) = 3x^2 + 1$ dan $f(1) = 4$.
2. Diketahui suatu persamaan kurva melalui titik $(0,3)$ dan mempunyai turunan x/y di setiap titik (x,y) yang dilaluinya. Tentukan persamaan kurva tersebut.
3. Sebuah benda jatuh dari ketinggian 80 m dengan kecepatan awal -5 m/s. Tentukan kecepatan dan ketinggiannya pada saat $t = 1$ s.