MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2013/2014

25 Oktober 2013

Latihan (Kuliah yang Lalu)

1. Taksirlah luas daerah di bawah kurva $y = f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$, dengan luas sejumlah persegi-panjang di atas kurva. Dengan hasil ini dan hasil sebelumnya, simpulkan bahwa luas daerah di bawah kurva tersebut mestilah sama dengan 1/3.

2. Tentukan luas daerah di bawah kurva $y = g(x) = x^3$, $0 \le x \le 1$, dengan terlebih dahulu menaksirnya dengan luas sejumlah persegi-panjang di bawah dan di atas kurva.

Sasaran Kuliah Hari Ini

4.2.1 Jumlah Riemann

Menghitung jumlah Riemann dari suatu fungsi pada selang tertentu.

4.2.2 Integral Tentu

Memahami konsep integral tentu dan meng-hitung integral tentu dari suatu fungsi sederhana pada selang tertentu sebagai limit jumlah Riemann (reguler).

MA1101 MATEMATIKA 1A

4.2.1 JUMLAH RIEMANN

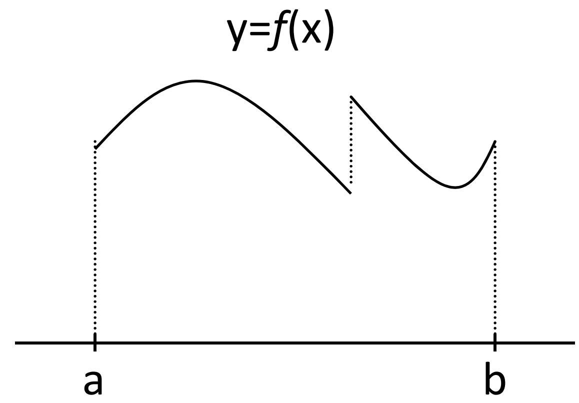
Menghitung jumlah Riemann dari suatu fungsi pada selang tertentu.

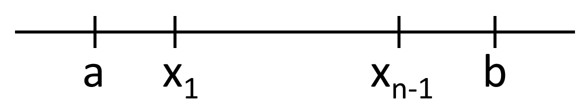
Jumlah Riemann

Misalkan $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik. Bagi selang $[a,b]$ atas n selang bagian (tak perlu sama panjang), sebutlah titik-titik pembaginya

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Himpunan titik-titik ini disebut sebagai **partisi** dari $[a,b]$. Untuk $i = 1, \ldots, n$, tulis $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (= lebar selang bagian ke-i).





Jumlah Riemann

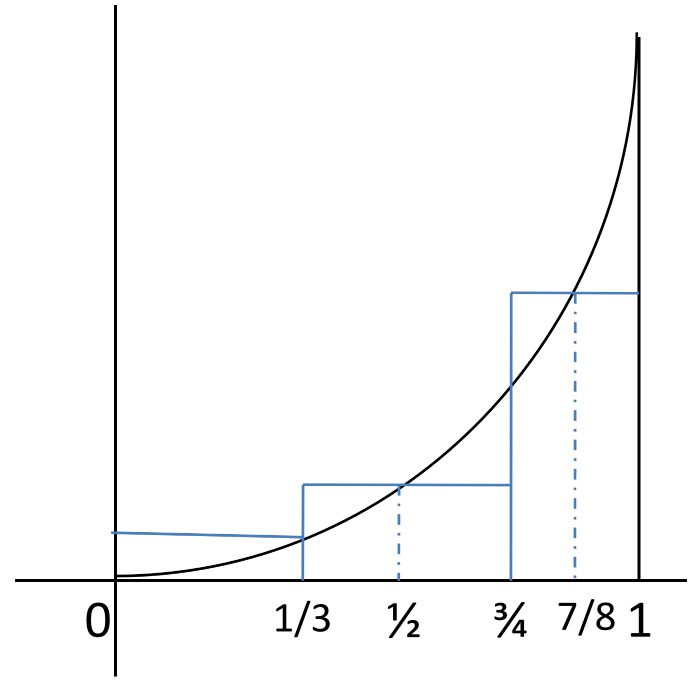
Dari tiap selang bagian, pilih titik $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, sembarang. Lalu bentuk penjumlahan berikut

$$R_P = \sum f(t_i).\Delta x_i$$

dengan indeks *i* berjalan dari 1 hingga n.

Bentuk ini dikenal sebagai **jumlah Riemann** utk f terhadap partisi $P = \{a=x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n=b\}$ dan titik-titik t_i.

Contoh



Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$,

$P = \{0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{4}, 1\}$, dan

$t_1 = \tfrac{1}{3}$, $t_2 = \tfrac{1}{2}$, $t_3 = \tfrac{7}{8}$.

Maka jumlah Riemann untuk f terhadap partisi P dan titik-titik t_i adalah

$$R_P = f(\tfrac{1}{3}).\tfrac{1}{3} + f(\tfrac{1}{2}).(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{7}{8})(1 - \tfrac{3}{4})$$

$$= 1/27 + 5/48 + 49/256.$$

Latihan

1. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, $P = \{0, ¼, ½, ¾, 1\}$, dan $t_1 = 1/8$, $t_2 = 1/3$, $t_3 = ½$, $t_4 = ⅞$. Tentukan jumlah Riemann untuk f terhadap partisi P dan titik-titik t_i tersebut.

MA1101 MATEMATIKA 1A

4.2.2 INTEGRAL TENTU

Memahami konsep integral tentu dan meng-hitung integral tentu dari suatu fungsi sederhana pada selang tertentu sebagai limit jumlah Riemann (reguler).

Integral Tentu

Jumlah Riemann untuk *f* merupakan *hampiran* untuk luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Semakin 'halus' partisinya, semakin baik hampiran tersebut. Jika

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

ada, maka *f* dikatakan **terintegralkan** pada $[a,b]$ dan **integral tentu** *f* pada $[a,b]$ didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

<u>Catatan</u>. $|P| = \text{maks}\,\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$. Jika $\Delta x_i = (b-a)/n$ dan $n \to \infty$, maka $|P| \to 0$.

Catatan

Dalam notasi $\int_a^b f(x)dx$, kita mengasumsikan bahwa $a < b$. Jika $a > b$, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Jika $a = b$, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Catat pula bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Teorema

Jika f terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik pada $[a,b]$, maka fungsi f terintegralkan pada $[a,b]$.

Akibat: Fungsi polinom, fungsi rasional, $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x}$, $s(x) = \sin x$, dan $c(x) = \cos x$ merupakan fungsi yang terintegralkan pada sembarang selang terbatas yg termuat dalam daerah asalnya.

Contoh

Diketahui $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, kontinu; karena itu f terintegralkan pada $[0, 1]$. Integral tentu f pada $[0, 1]$ dapat dihitung sebagai limit jumlah Riemann dengan **partisi reguler**:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}\right)\tfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Latihan

1. Fungsi $g(x) = x^3, 0 \leq x \leq 1$, terintegralkan pada $[0, 1]$. Nyatakan integral tentu g pada $[0, 1]$ sebagai limit jumlah Riemann dengan partisi reguler, dan hitunglah nilainya.