

# **MA1201 MATEMATIKA 2A**

**Hendra Gunawan**

Semester II, 2013/2014

24 Januari 2014

# Kuliah yang Lalu

## 7.1 Aturan Dasar Pengintegralan

Mengetahui bentuk integral baku dan dapat mengubah bentuk integral yang diberikan ke bentuk integral dengan substitusi peubah

## 7.2 Pengintegralan Parsial

Menghitung integral dengan teknik pengintegralan parsial

# Sasaran Kuliah Hari Ini

## **7.3 Integral Trigonometrik**

Menghitung beberapa integral trigonometrik

## **7.4 Teknik Substitusi yang Merasionalkan**

Menghitung integral dengan teknik substitusi yang merasionalkan

MA1201 MATEMATIKA 2A

# 7.3 INTEGRAL TRIGONOMETRIK

# Bentuk Integral yang Akan Dibahas

$$\int \sin^n x dx$$

$$\int \cos^n x dx$$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

$$\int \sin mx \cos nx dx$$

$$\int \sin mx \sin nx dx$$

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

$$\int \tan^n x dx$$

$$\int \cot^n x dx$$

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

$$\int \cot^m x \csc^n x dx$$

Bentuk  $\int \sin^n x \cdot dx$  dan  $\int \cos^n x \cdot dx$

1. Tentukan  $\int \cos^5 x \cdot dx$

Jawab:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \cdot dx &= \int \cos^4 x \cos x \cdot dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\ &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}$$

2. Tentukan (a)  $\int \cos^2 x \cdot dx$  dan (b)  $\int \sin^4 x \cdot dx$ .

Jawab:

$$(a) \quad \int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$(b) \quad \int \sin^4 x \cdot dx = \dots$$

3. Tentukan  $\int \sin^{-4} x \cos^3 x . dx$

Jawab:

$$\begin{aligned}\int \sin^{-4} x \cos^3 x . dx &= \int \sin^{-4} x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \\ &= \int (\sin^{-4} x - \sin^{-2} x) d(\sin x) \\ &= -\frac{1}{3} \sin^{-3} x + \sin^{-1} x + C.\end{aligned}$$



4. Tentukan  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$

Jawab:

5. Tentukan  $\int \sin 4x \cos 2x dx$

Jawab:

$$\sin 4x \cos 2x = \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x);$$

Karena itu

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{6} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C \\ &= -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

6. Tentukan  $\int \sin 4x \sin 2x \cdot dx$

Jawab:

$$\sin 4x \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 6x);$$

Karena itu

7. Tentukan  $\int \tan^2 x \cdot dx$

Jawab:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1;$$

Karena itu

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \cdot dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x - x + C. \end{aligned}$$

8. Tentukan  $\int \tan^3 x \cdot dx$

Jawab:

$$\int \tan^3 x \cdot dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x \cdot dx - \int \tan x \cdot dx$$

$$\sec^2 x \cdot dx = d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$$

9. Tentukan  $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

Jawab (Cara I):

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^4 x dx &= \int \tan^3 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x dx \\ &= \int (\tan^5 x + \tan^3 x) d(\tan x) \\ &= \frac{1}{6} \tan^6 x + \frac{1}{4} \tan^4 x + C.\end{aligned}$$

10. Tentukan  $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

Jawab (Cara II):

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^4 x dx &= \int \tan^2 x \sec^3 x \sec x \tan x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x d(\sec x) \\ &= \frac{1}{6} \sec^6 x - \frac{1}{4} \sec^4 x + C.\end{aligned}$$

**PR.** Tentukan  $\int \sec^3 x \cdot dx$



MA1201 MATEMATIKA 2A

# **7.4 TEKNIK SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN**

# Integral yang Mengandung Bentuk Akar

Integral seperti  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$  dapat dihitung dgn substitusi peubah  $u = \sqrt{x}$ . Dalam hal ini,  $u^2 = x$ , sehingga  $2u \cdot du = dx$ . Jadi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{2u}{1+u} du = \int \left(2 - \frac{2}{1+u}\right) du \\ &= 2u - 2 \ln |1+u| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C.\end{aligned}$$

# Contoh/Latihan

1. Tentukan  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

Jawab: Misal  $u^6 = x$ . Maka ...

# Integral mengandung bentuk

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$$

Untuk menghitung integral dengan integral yang mengandung bentuk

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ lakukan substitusi } x = a \sin t$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \text{ lakukan substitusi } x = a \tan t$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \text{ lakukan substitusi } x = a \sec t$$

# Contoh/Latihan

2. Tentukan  $\int \sqrt{4 - x^2} .dx$

Jawab: Misal  $x = 2 \sin t$ . Maka  $dx = 2 \cos t dt$ ,  
dan  $4 - x^2 = 4(1 - \sin^2 t) = 4 \cos^2 t$ , sehingga

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - x^2} .dx &= \int 4 \cos^2 t .dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

2. Tentukan  $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Jawab: Misal  $x = 2 \tan t$ . Maka  $dx = 2 \sec^2 t dt$ ,  
dan  $4 + x^2 = 4(1 + \tan^2 t) = 4 \sec^2 t$ , sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2 \sec^2 t}{2 \sec t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{2} \sqrt{4+x^2} + \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

3. Tentukan  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}$

Jawab: Misal  $x = 2 \sec t$ . Maka  $dx = \dots$

4. Tentukan  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

Jawab:  $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4.$

Misal  $x + 1 = 2 \tan t.$  Maka ...



**PR.** Tentukan  $\int \sqrt{x^2 - 4} . dx$