MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2013/2014

26 Maret 2014

Kuliah yang Lalu

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

Kuliah Hari Ini

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bag I

12.8 Maksimum dan minimum

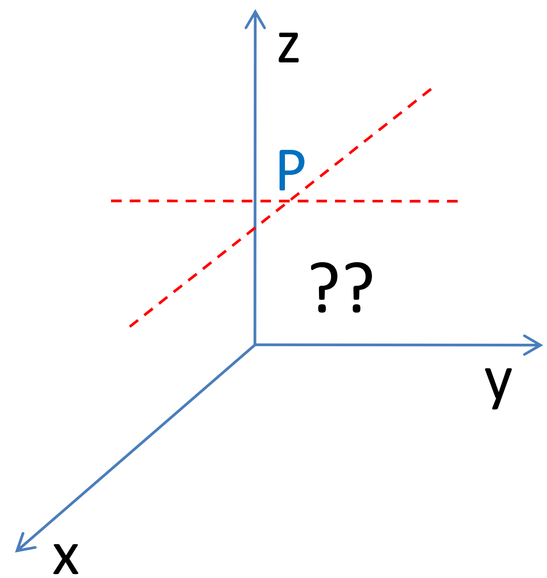
12.9 Metode pengali Lagrange

12.4 TURUNAN FUNGSI DUA PEUBAH

- Memeriksa apakah suatu fungsi dua peubah mempunyai turunan di titik tertentu dan menentukan turunannya

Turunan Parsial Saja Tidak Cukup

Kita sudah mendefinisikan turunan parsial dari suatu fungsi dua peubah; tapi eksistensi turunan parsial di suatu titik tidak memberi kita informasi tentang nilai fungsi di sekitar titik tsb.



Bagaimana Mendefinisikan Turunan

Turunan dari fungsi satu peubah $y = f(x)$ di $x = c$ didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Sayangnya bentuk ini **tidak dapat** diperumum untuk fungsi dua peubah

$$f'(\bar{c}) = \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{c}+\bar{h}) - f(\bar{c})}{\bar{h}},$$

karena pembagian dgn vektor tidak terdefinisi.

Turunan Fungsi Satu Peubah

Jika $y = f(x)$ mempunyai turunan di $x = c$, yakni

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m,$$

maka f **linear secara lokal** di $x \approx c$, yaitu

$$f(c+h) = f(c) + hm + h\varepsilon(h),$$

dengan

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - m \right] = 0.$$

Turunan Fungsi Satu Peubah

Sebaliknya, jika f **linear secara lokal** di $x \approx c$, sebutlah

$$f(c+h) = f(c) + hm + h\varepsilon(h),$$

dengan

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - m \right] = 0,$$

maka f mempunyai turunan di $x = c$, yakni

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m.$$

Turunan Fungsi Dua Peubah

Fungsi dua peubah *f* dikatakan mempunyai turunan di ***p*** = (*a*,*b*) jika dan hanya jika *f* linear secara lokal di sekitar ***p***, yakni

$$f(\overline{p}+\overline{h}) = f(\overline{p}) + (f_x(\overline{p}), f_y(\overline{p})) \bullet \overline{h} + \overline{\varepsilon}(\overline{h}) \bullet \overline{h},$$

dengan $\overline{\varepsilon}(\overline{h}) = (\varepsilon_1(\overline{h}), \varepsilon_2(\overline{h})), \quad \overline{h} = (h_1, h_2),$

dan $\lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} \overline{\varepsilon}(\overline{h}) = (\lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} \varepsilon_1(\overline{h}), \lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} \varepsilon_2(\overline{h})) = (0,0).$

Turunan Fungsi Dua Peubah

Vektor $\nabla f(\overline{p}) := (f_x(\overline{p}), f_y(\overline{p}))$ disebut turunan atau **gradien** *f* di ***p***.

Jadi, *f* mempunyai turunan di ***p*** jika dan hanya jika

$$f(\overline{p}+\overline{h}) = f(\overline{p}) + \nabla f(\overline{p}) \bullet \overline{h} + \overline{\varepsilon}(\overline{h}) \bullet \overline{h},$$

dengan $\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \overline{\varepsilon}(\overline{h}) = \overline{0}.$

<u>Catatan</u>: Operator ∇ disebut **operator del**.

Beberapa Catatan

1. Jika turunan fungsi satu peubah merupa-kan bilangan *f ’*(*p*), maka turunan fungsi dua peubah merupakan vektor
$$\nabla f(\bar{p}) := (f_x(\bar{p}), f_y(\bar{p}))$$
2. Hasil kali $\nabla f(\bar{p}) \bullet \bar{h}$ dan $\bar{\varepsilon}(\bar{h}) \bullet \bar{h}$ merupakan hasil kali titik.
3. Definisi turunan fungsi tiga (atau lebih) peubah dapat dirumuskan secara serupa.

Contoh

Turunan dari fungsi $f(x,y)=x^2+y^2$ di (1,2) adalah $\nabla f(1,2)=(2x,2y)\big|_{(1,2)}=(2,4)$.

Perhatikan bahwa untuk (h,k) ≈ (0,0) fungsi f linear secara lokal:

$$\begin{aligned} f(1+h,2+k) &= (1+h)^2+(2+k)^2 \\ &= 1+2h+h^2+4+4k+k^2 \\ &= 5+(2,4)\bullet(h,k)+(h,k)\bullet(h,k). \end{aligned}$$

Di sini $\bar{\varepsilon}(h,k)=(h,k)\to(0,0)$.

Teorema

Jika f mempunyai turunan parsial f_x dan f_y yang kontinu pada suatu cakram yang memuat (a,b), maka f mempunyai turunan di (a,b).

<u>Contoh</u>. $f(x,y) = x^2 + y^2$ mempunyai turunan parsial $f_x = 2x$ dan $f_y = 2y$ yang kontinu pada **R**, karena itu f mempunyai turunan di setiap titik.

Sifat Turunan

Operator del ∇ memenuhi:

1. $\nabla[f(\overline{p})+g(\overline{p})]=\nabla f(\overline{p})+\nabla g(\overline{p})$

2. $\nabla[\alpha.f(\overline{p})]=\alpha.\nabla f(\overline{p})$

3. $\nabla[f(\overline{p})g(\overline{p})]=f(\overline{p})\nabla g(\overline{p})+g(\overline{p})\nabla f(\overline{p})$

Teorema

*Jika f mempunyai turunan di **p**, maka*
*f kontinu di **p**.*

Catatan. Kontraposisi teorema di atas berbunyi: jika f tidak kontinu di $\boldsymbol{p}$, maka f tidak mempunyai turunan di $\boldsymbol{p}$.

Soal

Selidiki apakah fungsi di bawah ini mempunyai turunan di titik (0,0).

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0.$
2. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$

Soal

Buktikan bahwa

3. $$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}.$$

12.7 BIDANG SINGGUNG DAN HAMPIRAN – BAGIAN I

- Menentukan persamaan bidang singgung pada suatu permukaan di titik tertentu
- Menghitung nilai hampiran dari suatu fungsi di sekitar titik tertentu

Hampiran Linear & Bidang Singgung

Bila *f* mempunyai turunan di ***p*** = (*a*,*b*), maka kita mempunyai **hampiran linear**

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \nabla f(a,b) \bullet (x-a, y-b)$$

Dalam hal ini, persamaan

$$z = f(a,b) + \nabla f(a,b) \bullet (x-a, y-b)$$

$$= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

merupakan persamaan **bidang singgung** pada permukaan $z = f(x,y)$ di titik (a,b).

Contoh

Persamaan bidang singgung pada permukaan z = $f(x, y) = x^2 + y^2$ di (1,2) adalah

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$$

$$= 5 + 2(x-1) + 4(y-2) = -5 + 2x + 4y.$$

Menggunakan persamaan bidang singgung ini, kita mempunyai hampiran

$$(1.1)^2 + (1.9)^2 \approx 5 + 2(0.1) + 4(-0.1) = 4.8.$$

Diferensial

Misal $z = f(x,y)$ mempunyai turunan di $\boldsymbol{p} = (a,b)$. Jika dx dan dy adalah diferensial peubah bebas x dan y, maka

$$dz = df(a,b) = \nabla f(a,b) \bullet (dx, dy)$$

disebut **diferensial** dari f di (a,b). Jadi, hampiran linear di sekitar (a,b) dapat dituliskan sebagai

$$f(x,y) \approx f(a,b) + df(a,b)$$

Contoh

Jika $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, maka diferensial dari f di (1,2) adalah

$$dz = f_x(1,2)dx + f_y(1,2)dy = 2dx + 4dy.$$

Jika $dx = 0.1$ dan $dy = -0.1$, maka

$$dz = 2(0.1) + 4(-0.1) = -0.2.$$

Soal

Diketahui rumus **tekanan** gas $P = k(T/V)$ dinyatakan dalam **suhu** T dan **volume** V, dengan k menyatakan suatu konstanta.

Jika dalam pengukuran T terdapat kesalahan maksimum 1% dan dalam pengukuran V terdapat kesalahan maksimum 2%, taksirlah kesalahan maksimum dalam perhitungan P?