# MA1201 MATEMATIKA 2A

**Hendra Gunawan**

Semester II, 2013/2014

28 Maret 2014

# Kuliah yang Lalu

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

**12.4 Turunan fungsi dua peubah**

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

**12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bag I**

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

# Kuliah Hari Ini

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

**12.5 Turunan berarah dan gradien**

**12.6 Aturan Rantai**

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi – Bag II

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

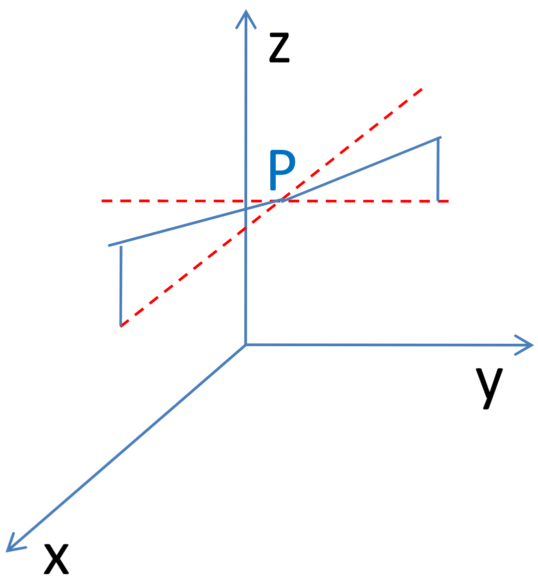
MA1201 MATEMATIKA 2A

# 12.5 TURUNAN BERARAH

- Menentukan turunan berarah dari suatu fungsi di suatu titik dalam arah tertentu

# Laju Perubahan dalam Arah Sembarang

Misalkan $z = f(x,y)$. Turunan parsial $f_x$ dan $f_y$ mengukur laju perubahan nilai $f$ dalam arah sejajar dengan sumbu-x dan sumbu-y. Bagaimana bila kita bergerak dalam arah lainnya?



# Review: Definisi Turunan Parsial

Misalkan ***p*** = (x,y), **i** = (1,0), dan **j** = (0,1). Maka kedua turunan parsial dari z = *f*(*x*,*y*) di ***p*** dapat didefinisikan ulang sebagai

$$f_x(\overline{p}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{p} + h\overline{i}) - f(\overline{p})}{h}.$$

$$f_y(\overline{p}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{p} + h\overline{j}) - f(\overline{p})}{h}.$$

# Definisi Turunan Berarah

Dengan menggantikan **i** atau **j** dengan vektor satuan **u** = ($u_1$,$u_2$) sembarang, maka kita dapat mendefinisikan turunan berarah dari z = *f*(*x*,*y*) di ***p*** = (x,y) sebagai

$$D_{\bar{u}} f(\bar{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{p} + h\bar{u}) - f(\bar{p})}{h}.$$

Jadi, $D_{\bar{i}} f(\bar{p}) = f_x(\bar{p})$ dan $D_{\bar{j}} f(\bar{p}) = f_y(\bar{p})$.

# Hubungan dengan Gradien

Jika *f* mempunyai turunan (atau linear secara lokal) di ***p***, maka *f* mempunyai turunan berarah di ***p*** dalam arah vektor **u** = ($u_1$,$u_2$) sembarang, dan

$$D_{\overline{u}} f(\overline{p}) = \overline{u} \bullet \nabla f(\overline{p}) = u_1 f_x(\overline{p}) + u_2 f_y(\overline{p}).$$

Fakta ini dapat dibuktikan sebagai berikut: →

# Bukti

Karena *f* mempunyai turunan di ***p***, maka

$$f(\overline{p}+h\overline{u})-f(\overline{p})=\nabla f(\overline{p})\bullet(h\overline{u})+\overline{\varepsilon}(h\overline{u})\bullet(h\overline{u}),$$

dengan $\lim_{h\to 0}\overline{\varepsilon}(h\overline{u})=\overline{0}.$ Bagi kedua ruas dgn *h*,

$$\frac{f(\overline{p}+h\overline{u})-f(\overline{p})}{h}=\nabla f(\overline{p})\bullet\overline{u}+\overline{\varepsilon}(h\overline{u})\bullet\overline{u}.$$

Hitung limitnya untuk *h* → 0, kita peroleh

$$D_{\overline{u}}f(\overline{p})=\nabla f(\overline{p})\bullet\overline{u}.$$

# Contoh

Turunan parsial dari $f(x, y) = x^2 + y^2$ di (1,2) adalah

$$D_{\bar{i}} f(1,2) = 2x\Big|_{(1,2)} = 2; \qquad D_{\bar{j}} f(1,2) = 2y\Big|_{(1,2)} = 4.$$

Turunan berarah dari *f* di (1,2) dalam arah vektor ***u*** = (0.6,0.8) adalah

$$D_{\bar{u}} f(1,2) = (2,4) \bullet (0.6,0.8) = 1.2 + 3.2 = 4.4.$$

yang ternyata lebih besar daripada $D_j f(1,2)$.

# Laju Perubahan Maksimum

Misal θ adalah sudut antara ***u*** dan $\nabla f(\overline{p})$. Maka

$$D_{\overline{u}} f(\overline{p}) = \overline{u} \bullet \nabla f(\overline{p}) = \left\|\overline{u}\right\| \cdot \left\|\nabla f(\overline{p})\right\| \cos\theta.$$

Jadi $D_u f(\boldsymbol{p})$ akan bernilai maksimum bila θ = 0 dan minimum bila θ = π.

$$\theta = 0 \Rightarrow D_{\overline{u}} f(\overline{p}) = \left\|\nabla f(\overline{p})\right\|.$$

$$\theta = \pi \Rightarrow D_{\overline{u}} f(\overline{p}) = -\left\|\nabla f(\overline{p})\right\|.$$

# Contoh

Tentukan dalam arah vektor manakah turunan berarah dari $f(x, y) = x^2 + y^2$ di (1,2) mencapai

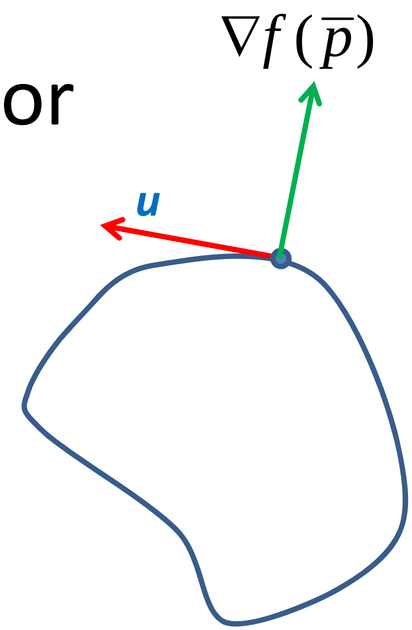
(a) nilai maksimum;

(b) nilai minimum.

Tentukan laju perubahan maksimum dan minimumnya.

# Kurva Ketinggian dan Gradien

Pada kurva ketinggian, nilai *f* konstan. Jadi, jika kita bergerak dalam arah vektor singgung ***u*** pada kurva tsb, maka laju perubahan ketinggiannya akan sama dengan nol:




$$D_{\overline{u}} f(\overline{p}) = \overline{u} \bullet \nabla f(\overline{p}) = 0.$$

Jadi vektor gradien *f* di ***p*** tegak lurus pada kurva ketinggian *f* yang melalui ***p***.

# Contoh

Misal $f(x,y)=x^2+y^2$. Maka turunan berarah dari $f$ di (1,2) dalam arah vektor ***u*** = $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$ sama dengan nol:

$$D_{\overline{u}}f(\overline{p})=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\bullet(2,4)=0.$$

Ini terjadi karena vektor ***u*** merupakan vektor singgung pada kurva ketinggian $f$ di (1,2).

# Soal 1

Diketahui $f(x,y) = 1$ untuk $(x,y)$ dengan $0 < y < x^2$, dan $f(x,y) = 0$ untuk $(x,y)$ lainnya. Buktikan bahwa $f$ mempunyai turunan berarah di $(0,0)$ dalam arah sembarang, tetapi $f$ tidak mem-punyai turunan (bahkan tidak kontinu) di $(0,0)$.

# Soal 2

Diketahui $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Gambarlah peta kontur dan medan gradiennya (yang menggambarkan vektor-vektor gradien *f* di sejumlah titik) pd sistem koordinat yg sama.

MA1201 MATEMATIKA 2A

# 12.6 ATURAN RANTAI

- Menggunakan Aturan Rantai untuk me-nentukan turunan fungsi komposisi antara fungsi dua peubah dengan fungsi vektor
- Menentukan turunan dari fungsi satu peubah yang diberikan secara implisit

# Aturan Rantai, Versi Pertama

Jika $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ mempunyai turunan di $t$ dan $z = f(x,y)$ mempunyai turunan di $(x(t),y(t))$, maka $z = f(x(t),y(t))$ mempunyai turunan di $t$ dengan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

# Contoh

Misalkan $z = x^2y^3$ dengan $x = t^2 + 1$ dan $y = t^2 - 1$. Maka

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{dy}\frac{dy}{dt} = 2xy^3(2t) + 3x^2y^2(2t)$$

$$= 4t(t^2+1)(t^2-1)^3 + 6t(t^2+1)^2(t^2-1)^2$$

$$= 4t(t^2-1)^2(t^4-1) + 6t(t^4-1)^2$$

$$= 2t(t^4-1)(5t^4-4t^2-1).$$

# Soal

Diketahui volume tabung $V = \pi r^2 h$. Misalkan pada saat $r = 10$ cm dan $h = 20$ cm, tabung tsb mengembang dengan jari-jarinya bertambah 1 cm per jam dan tingginya bertambah 0.5 cm per jam. Berapakah laju pertambahan volumenya?

# Aturan Rantai, Versi Kedua

Jika $x = x(s,t)$ dan $y = y(s,t)$ mempunyai turunan parsial di $(s,t)$ dan $z = f(x,y)$ mempunyai turunan di $(x(s,t),y(s,t))$, maka $z = f(x(s,t),y(s,t))$ mem-punyai turunan di $(s,t)$ dengan

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

# Contoh

Misalkan $z = x^2y$ dengan $x = s + t$ dan $y = 1 - st$ .
Maka

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2xy(1) + x^2(-t)$$

$$= 2(s+t)(1-st) - t(s+t)^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2xy(1) + x^2(-s)$$

$$= 2(s+t)(1-st) - s(s+t)^2.$$

# Turunan Fungsi Implisit (Lagi)

Misalkan $F(x,y) = 0$ mendefinisikan $y$ secara implisit sebagai fungsi dari $x$. Maka, dengan menurunkan terhadap $x$, kita peroleh:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}.$$

# Turunan Fungsi Implisit (Baru)

Misalkan $F(x,y,z) = 0$ mendefinisikan $z$ secara implisit sebagai fungsi dari $x$ dan $y$. Maka, dgn menurunkan secara parsial terhadap $x$ dan $y$, kita peroleh:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}.$$

# Contoh/Latihan

1. Diketahui $x^3 + 2x^2y - y^3 = 0$. Tentukan $dy/dx$.

2. Diketahui $3x^2z + y^3 - xyz^3 = 0$. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$.